

Redes de Restricciones entre Puntos y Duraciones

I. Navarrete, R. Marín and J. Palma*

Grupo de Inteligencia Artificial e Ingeniería del Conocimiento (AIKE)
Dpto. de Ingeniería de la Información y Comunicaciones
Facultad de Informática, Universidad de Murcia, Campus de Espinardo
30071 Espinardo (Murcia), Spain
{inava, roque, jpalma}@dif.um.es
<http://www.um.es/aike>

Resumen En este artículo se presenta un formalismo que permite representar relaciones temporales entre puntos y duraciones, y se resumen los principales resultados obtenidos. Primero se define un modelo de partida (PDN) que extiende al álgebra de puntos con la inclusión de variables adicionales que representan duraciones entre puntos, y con la inclusión de restricciones cualitativas entre puntos y duraciones. El análisis de la consistencia para este tipo de modelo es un problema NP-completo. Después, el modelo cualitativo PDN es extendido mediante la introducción de relaciones métricas unarias sobre puntos y duraciones (APDN). Puesto que el modelo PDN es un caso particular del modelo APDN, el análisis de la consistencia en este último modelo es también un problema NP-completo. Por este motivo, identificamos diferentes casos particulares tratables que conservan suficiente expresividad. En el trabajo se presentan algoritmos eficientes para las tareas básicas de razonamiento temporal en estos casos tratables: chequeo de la consistencia, búsqueda de una solución y obtención de la red mínima equivalente.

Palabras Clave: Razonamiento Temporal, Redes de Restricciones Temporales, Álgebra de Puntos, Satisfacción de Restricciones.

1 Introducción

Una tarea de razonamiento temporal puede considerarse como un caso especial de un problema de satisfacción de restricciones (CSP o Constraint Satisfaction Problem) [14], en el que las variables representan entidades temporales y las restricciones representan las relaciones temporales definidas entre ellas. Se han propuesto diferentes modelos de razonamiento temporal basados en restricciones [13], que permiten representar relaciones temporales cualitativas, como en el caso del álgebra de puntos (*PA*) [16] y del álgebra de intervalos (*IA*) [1], o relaciones métricas entre puntos [4] [5]. Posteriormente, aparecieron modelos capaces de

* Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el MCyT mediante los proyectos TIC2000-0873-C02-02 y TIC2001-4936-E.

representar relaciones entre duraciones [2] [3] [9] [17] [12], siguiendo la idea de trabajar sobre dos redes ortogonales, una de puntos o intervalos y otra de duraciones. Se esquematizaron los procedimientos a seguir para propagar restricciones entre ambas redes, pero sin llegar a proponer algoritmos detallados, cuya corrección y completitud estuviesen formalmente demostradas, ni identificar fragmentos que fuesen a la vez tratables y expresivos. Otro campo de interés en esta línea, es el estudio del problema de la integración de relaciones cualitativas y métricas entre puntos e intervalos en un modelo unificado [6] [7].

Para ilustrar la utilidad de los modelos de relaciones entre duraciones, consideremos un ejemplo ya clásico [7] extendido con información sobre duraciones.

Ejemplo 1. Bob, Fred y John trabajan para una compañía que posee una oficina local y otra principal en Los Angeles. Cuando trabajan en la oficina local, John tarda menos de 20 minutos en ir al trabajo, y Fred tarda entre 15 y 20 minutos. Dos veces por semana, John trabaja en la oficina principal, tardando 60 minutos como mínimo en llegar al trabajo. Hoy John salió de casa entre las 7:05-7:10 a.m. y Fred llegó al trabajo entre las 7:50-7:55 a.m. Bob ha tardado menos que Fred, y hoy ha salido de casa antes de las 7:45 a.m. Además, sabemos que Fred y John han coincidido en un semáforo, camino del trabajo.

En el ejemplo aparece una relación cualitativa entre duraciones y relaciones métricas disyuntivas entre puntos. Nuestro razonador temporal debería decidir si toda esta información es consistente e inferir información adicional, como por ejemplo la hora de llegada de Bob o quién llega antes al trabajo.

En este trabajo presentamos dos modelos que utilizan puntos y duraciones como entidades temporales. En la sección 2 se introduce un modelo inicial que permite representar sólo relaciones cualitativas entre puntos y duraciones (*PDN*), y está formado por dos redes *PA* conectadas mediante un conjunto de relaciones ternarias. En la sección 3 este modelo es extendido con la introducción de relaciones métricas unarias (*APDN*), lo que nos permitirá representar toda la información contenida en el ejemplo anterior. Se identifican casos particulares tratables, y se introducen algoritmos para resolver las tareas básicas de razonamiento temporal en estos modelos. Finalmente se resumen las conclusiones, se discuten las ventajas e inconvenientes de los modelos propuestos y se indican algunas líneas de trabajo futuro.

2 Redes cualitativas de puntos y duraciones

2.1 Modelo PDN

Comenzaremos por extender el álgebra de puntos, introduciendo *variables de duraciones* y relaciones cualitativas entre ellas. Cada duración d_{ij} representa el tiempo transcurrido entre los instantes p_i and p_j en valor absoluto, es decir, $d_{ij} = |p_i - p_j|$. Entre cada dos duraciones pueden establecerse las mismas relaciones cualitativas $T = \{<, >, =\}$ que en el *PA*, para representar que una duración es menor, mayor o igual que otra. Como en el *PA*, se admiten todas

las relaciones del conjunto 2^T , es decir, todas las posibles disyunciones de las relaciones primitivas, tales como $d_{ij} \leq d_{km}$.

Definición 1. Una *red cualitativa de puntos y duraciones* (PDN o red-PD) es una estructura $\Sigma_{PD} = \langle N_P, N_D, Rel(P, D) \rangle$ formada por dos redes PA, N_P y N_D , y un conjunto de restricciones ternarias $Rel(P, D)$ que relacionan puntos y duraciones, donde :

- N_P está formado por un conjunto de variables temporales de puntos $P = \{p_1, \dots, p_n\}$, que toman valores sobre \mathbb{R}_0^+ , y un conjunto de relaciones-PA entre ellas, $Rel(P) = \{R_{i,j} \in 2^T \mid \forall 1 \leq i, j \leq n\}$.
- N_D está formado por un conjunto de variables temporales de duraciones $D = \{d_{ij} \mid p_i, p_j \in P\}$ sobre \mathbb{R}_0^+ , y un conjunto de relaciones-PA entre ellas, $Rel(D) = \{R_{ij,km} \in 2^T \mid \forall d_{ij}, d_{km} \in D\}$.
- $Rel(P, D) = \{(P_i, P_j, D_{ij}) \in \mathbb{R}_0^3 \mid D_{ij} = |P_i - P_j|, \forall d_{ij} \in D\}$.

Llamaremos **PD-restricciones** a $Rel(P)$, $Rel(D)$ y $Rel(P, D)$.

Definición 2. Una red-PD Σ_{PD} con n puntos y d duraciones es **consistente** si, y sólo si, existe al menos una **solución** $S = (A_P, A_D)$, donde A_P es una n -tupla de parejas $\langle p_i, P_i \rangle$ que denota la asignación de valores reales a las variables de puntos, y A_D es una d -tupla de pares $\langle d_{ij}, D_{ij} \rangle$ que asigna un valor positivo a cada variable de duración, de tal forma que todas las PD-restricciones se satisfagan.

Semánticamente, una solución es una ordenación de los puntos a lo largo del eje real de tiempos, tal que preserve, no sólo las posiciones relativas entre puntos, sino también la magnitud relativa de la separación entre ellos.

Desafortunadamente, se puede demostrar que el problema SAT-PDN de decidir la consistencia de una PDN es intratable.

Teorema 1. (Navarrete [9]) SAT-PDN es NP-completo.

2.2 PDN simple

Definición 3. Una red-PD Σ_{PD}^S tal que toda relación binaria es primitiva es llamada una **PDN simple**. Una PDN simple $\Sigma_{PD}^S = \langle N_P^S, N_D^S, Rel^S(P, D) \rangle$ es un escenario consistente de una red-PD $\Sigma_{PD} = \langle N_P, N_D, Rel(P, D) \rangle$ si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. $\forall R_{i,j} \in Rel(P), R_{i,j}^S \in Rel^S(P) : R_{i,j}^S \subseteq R_{i,j}$
2. $\forall R_{ij,km} \in Rel(D), R_{ij,km}^S \in Rel^S(D) : R_{ij,km}^S \subseteq R_{ij,km}$
3. Σ_{PD}^S es consistente.

Una solución $S = (A_P, A_D)$ de una red-PD Σ_{PD} determina un escenario consistente Σ_{PD}^S . Van Beek [15] propuso un algoritmo para encontrar un escenario consistente en una red-PA, pero éste no es correcto para PDNs, ya que las redes-PA N_P y N_D no son mutuamente independientes a causa de las relaciones ternarias $Rel(P, D)$. Un sencillo ejemplo muestra esto claramente.

Ejemplo 2. Sea Σ_{PD} una PDN con tres variables de puntos y dos de duraciones, tal que $p_1 < p_2 < p_3$ y $d_{13} < d_{12}$. No existe ninguna solución para Σ_{PD} , porque debe verificarse que $d_{13} = d_{12} + |p_2 - p_3|$, pero dado que $|p_2 - p_3| \geq 0$, no es posible que $d_{13} < d_{12}$. Por tanto, Σ_{PD} es inconsistente, aunque N_P y N_D , consideradas como redes-PA separadas, sean consistentes.

Para el análisis de consistencia, es útil representar una PDN mediante dos grafos dirigidos $G_P = (V_P, E_P)$ y $G_D = (V_D, E_D)$. Se incluye un *nodo-punto* p_i en V_P por cada variable de puntos y un *nodo-duración* d_{ij} por cada variable de duraciones. Se incluye un arco $p_i \xrightarrow{R_{i,j}} p_j$ en E_P por cada $R_{i,j} \in Rel(P)$, y un arco $d_{ij} \xrightarrow{R_{ij,km}} d_{km}$ en E_D por cada $R_{ij,km} \in Rel(D)$. Como caso especial, si $d_{ij}, d_{ji} \in D$, tomamos $R_{ij,ji} = \{=\}$. Además, supondremos que las siguientes *restricciones triviales* se satisfacen:

$$\begin{aligned} p_i R_{i,j} p_j &\Leftrightarrow p_j R_{i,j}^{-1} p_i \\ d_{ij} R_{ij,km} d_{km} &\Leftrightarrow d_{km} R_{ij,km}^{-1} d_{ij} \\ R_{i,i} &= \{=\}, R_{i,j,ij} = \{=\} \end{aligned}$$

2.3 Tareas de razonamiento en una PDN simple

Existen condiciones necesarias y suficientes que garantizan la consistencia de una PDN simple. Una vez conocidas estas condiciones, es fácil diseñar un algoritmo que analice la consistencia de una PDN simple.

Lema 1. *Sea una PDN simple $\Sigma_{PD}^S = \langle N_P, N_D, Rel(P, D) \rangle$. Si Σ_{PD}^S es consistente, entonces debe satisfacer los siguientes **PD-axiomas**¹:*

1. Si $d_{ij} \in D$ entonces $[(p_i = p_j \Leftrightarrow d_{ij} = 0) \wedge (p_i \neq p_j \Leftrightarrow d_{ij} > 0)]$
2. Si $[(p_i = p_j) \wedge (d_{IK}, d_{JK} \in D)]$ entonces $d_{IK} = d_{JK}$
3. Si $p_i < p_j < p_k$ entonces $[(d_{IJ}, d_{IK} \in D \Rightarrow d_{IJ} < d_{IK}) \wedge (d_{JK}, d_{IK} \in D \Rightarrow d_{JK} < d_{IK})]$
4. Si $p_i < p_j < p_k < p_m$ entonces $[(d_{JK}, d_{IM} \in D \Rightarrow d_{JK} < d_{IM}) \wedge (d_{IJ}, d_{KM}, d_{IK}, d_{JM} \in D \Rightarrow R_{IJ,KM} = R_{IK,JM})]$

Por otra parte, ambas redes PA, N_P y N_D , deben ser necesariamente consistentes. La consistencia de una red PA está relacionada con la topología de su grafo a través del siguiente teorema:

Teorema 2. *(Van Beek [15]) Sea G el grafo de restricciones de una red-PA. La red-PA es consistente si, y sólo si, para cada par de nodos p_i, p_j que pertenezcan a la misma componente fuertemente conexa (SCC) de G se verifica que $\{=\} \subseteq R_{i,j}$.*

Podemos combinar el último teorema y el lema 1 para determinar las condiciones necesarias y suficientes para la consistencia de una red PDN simple, y construir a partir de ellas un algoritmo eficiente de análisis de consistencia.

¹ Usaremos subíndices mayúsculas para variables de duración, e.g. d_{IK} se refiere tanto a d_{ik} , como a d_{ki} .

Teorema 3. (Navarrete [10]) *Las condiciones necesarias y suficientes para que una red PDN Σ_{PD}^S simple sea consistente son:*

- N_P y N_D deben ser independientemente consistentes.
- Los PD-axiomas deben satisfacerse.

En la figura 1 se muestra una función CSPDN que chequea las condiciones necesarias y suficientes. Se usan dos funciones auxiliares: SAME-SCC(G_P^R, p_i, p_j) que devuelve TRUE si p_i y p_j están en la misma SCC de G_P y análogamente para las duraciones. La función CSPDN llama a la función AXIOM-3-4 (figura 2), que comprueba si los axiomas 3 y 4 del lema 1 se satisfacen. G_P^R y G_D^R son dos grafos reducidos que se obtienen colapsando cada SCC en un único nodo-clase y etiquetando cada arco con la intersección de las etiquetas de los arcos que van de cada SCC a otro. La función CSPDN decide la consistencia de una PDN simple Σ_{PD}^S en $O(\max(n^2, d^2))$.

1. $G_P^R \leftarrow \text{REDUCE_GRAPH}(G_P)$;
2. for each $p_i, p_j \in V_P$ such that SAME-SCC(G_P^R, p_i, p_j) do
3. if $R_{i,j} \leftarrow R_{i,j} \cap \{=\}$ is empty then return (FALSE);
4. if $d_{IJ} \in V_D$ then add $d_0 \xrightarrow{=} d_{IJ}$ and $d_{IJ} \xrightarrow{=} d_0$ to E_D ;
5. $G_D^R \leftarrow \text{REDUCE_GRAPH}(G_D)$;
6. for each $d_{ij}, d_{km} \in V_D$ such that SAME-SCC(G_D^R, d_{ij}, d_{km}) do
7. if $R_{ij,km} \leftarrow R_{ij,km} \cap \{=\}$ is empty then return (FALSE);
8. for each $d_{ij} \in V_D$ such that SAME-SCC(G_D^R, d_{ij}, d_0) do
9. if $R_{i,j} \leftarrow R_{i,j} \cap \{=\}$ is empty then return (FALSE);
10. for each $d_{IK}, d_{JK} \in V_D, (k \neq i, j)$ do
11. if $R_{IK,JK} \leftarrow R_{IK,JK} \cap \{=\}$ is empty then return (FALSE);
12. if AXIOM-3-4(G_P^R, G_D^R) then return (TRUE) else return (FALSE);

Figura 1. Función CSPDN (Σ_{PD}^S, G_P, G_D)

En el algoritmo se usa un *esquema de índices* especial para los nodos-clase de un grafo reducido. Al encontrar el orden topológico de G_P^R , los nodos-clase de G_P^R se renombran siguiendo el orden topológico $X_1 < X_2 < \dots < X_p$, de forma que si $X_i < X_j$ entonces $i < j$. Además, se generan **nombres alternativos** para cada nodo-clase de duración Y en G_D^R , de la siguiente forma. Para cada $d_{km} \in Y$:

- Si $p_k \in X_i, p_m \in X_j$ y $X_i < X_j$ entonces Y_{ij} es un nombre alternativo de Y
- Si $p_k \in X_i, p_m \in X_j$ y $X_i > X_j$ entonces Y_{ji} es un nombre alternativo de Y

Una vez que sabemos cómo analizar la consistencia en una PDN simple, es fácil diseñar un algoritmo (exponencial) para el caso PDN general, aplicando CSPDN a cada PDN simple extraída de la red general [11].

1. Let $X_1 < X_2 < \dots < X_p$ be the topological ordering of G_P^R ;
2. Let $Y_0 < Y_{i_1 j_1} < Y_{i_2 j_2} < \dots < Y_{i_q j_q}$ be the topological ordering of G_D^R ;
3. for each $Y_{IJ} < Y_{IK}$ if $\neg(X_J < X_K)$ then return (FALSE);
4. for each $Y_{JK} < Y_{IK}$ if $\neg(X_I < X_J)$ then return (FALSE);
5. for each Y_{JK}, Y_{IM} such that $(I < J < K < M)$
6. if $\neg(Y_{JK} < Y_{IM})$ then return (FALSE);
7. for each Y_{IJ}, Y_{KM} such that $(I < J < K < M)$
8. if $Y_{IK}, Y_{JM} \in V_D^R$ then if $\neg(R_{IJ, KM} = R_{IK, JM})$ then return (FALSE);
9. return (TRUE);

Figura 2. Función AXIOM-3-4 (G_P^R, G_D^R)

Otra tarea de razonamiento interesante es la búsqueda de una solución en una PDN simple consistente. Esquemáticamente, una forma de conseguirlo consiste en instanciar incrementalmente cada variable dentro de unos límites que se obtienen sumando a los valores ya instanciados las intersecciones de los límites impuestos por las relaciones binarias y ternarias. Este procedimiento, cuya complejidad es $O(n^2 \times d)$, se ilustra con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3. Supongamos una PDN simple con 4 puntos y 3 duraciones, tales que $p_3 < p_4 < p_1 < p_2$ y $d_{34} = d_{14} < d_{12}$. Los órdenes topológicos resultantes al calcular G_P^R y G_D^R son:

$$\begin{aligned} X_1\{p_3\} &< X_2\{p_4\} < X_3\{p_1\} < X_4\{p_2\} \\ Y_{12=23}\{d_{34}, d_{14}\} &< Y_{34}\{d_{12}\} \end{aligned}$$

Esta red es consistente, y se puede aplicar el procedimiento esquematizado arriba:

$$\begin{aligned} X_1\{p_3\} &= 1, \quad X_2\{p_4\} = 4, \quad Y_{12=23}\{d_{34}, d_{14}\} = X_2 - X_1 = 3 \\ X_3\{p_1\} &= X_2 + Y_{23} = 7, \quad X_4\{p_2\} = X_3 + Y_{12} + 1 = 11 \\ Y_{34}\{d_{12}\} &= X_4 - X_3 = 4 \end{aligned}$$

En cuanto a la obtención de la red mínima equivalente a una PDN general, se puede seguir un procedimiento exponencial similar al propuesto en [5]. Basta generar cada una de las PDN simples que se pueden extraer de la PDN general, seleccionando sólo relaciones primitivas, y aplicando CSPDN hasta que no se puedan encontrar más escenarios consistentes. La unión de las restricciones de todos los posibles escenarios consistentes nos proporciona las restricciones mínimas. Obsérvese que, aunque puede existir un número infinito de soluciones, el número de escenarios consistentes está acotado por el máximo número de PDN simples que pueden extraerse: $O(2^{n+d})$.

3 Redes aumentadas de puntos y duraciones

3.1 Modelo APDN

Si retomamos el ejemplo 1, comprobamos que existe información métrica que no puede ser representada en el modelo PDN. Para ello, debemos extender el modelo

PDN con restricciones métricas sobre puntos y sobre duraciones. Seguiremos la idea de Meiri [7], que consiste en extender PA con restricciones cuantitativas sobre los dominios. El nuevo formalismo resultante subsume a las redes PA aumentadas de Meiri y al modelo TCSP de Dechter et al. [5].

Definición 4. Una red aumentada de puntos y duraciones (APDN) es una PDN aumentada con restricciones métricas unarias sobre los dominios de las variables de puntos y sobre las variables de duraciones, es decir, una estructura $\Sigma_{APD} = \langle N_P, N_D, Rel(P, D) \rangle$ donde N_P y N_D son redes PA aumentadas. Las restricciones adicionales son de la forma:

$$\begin{aligned} Un(P) &= \{C_i \mid \text{para cada } p_i \in P\} \\ Un(D) &= \{C_{ij} \mid \text{para cada } d_{ij} \in D\} \end{aligned}$$

donde C_i y C_{ij} son conjuntos formados por un único intervalo real o múltiples intervalos. Nos referimos a $Rel(P)$, $Rel(D)$, $Rel(P, D)$, $Un(P)$ y $Un(D)$ como APD-restricciones.

Llamaremos $Qual(\Sigma_{APD})$ a la PDN que tiene las mismas variables y las mismas relaciones cualitativas que la red-APD Σ_{APD} . Una red-APD Σ_{APD}^S es una APDN simple si $Qual(\Sigma_{APD})$ es una PDN simple y cada restricción métrica en Σ_{APD} está formada por un único intervalo.

Definición 5. Un escenario consistente con dominios mínimos de una red-APD Σ_{APD} es una red-APD simple consistente Σ_{APD}^S tal que:

1. $Qual(\Sigma_{APD}^S)$ es un escenario consistente de $Qual(\Sigma_{APD})$.
2. $Un^S(P) \subseteq Un(P)$, $Un^S(D) \subseteq Un(D)$ y cada restricción unaria de Σ_{APD}^S corresponde a un dominio mínimo no vacío.

De forma análoga a una PDN, una APDN también puede representarse mediante dos grafos dirigidos $G_{AP} = (V_P, E_P)$ y $G_{AD} = (V_D, E_D)$, y etiquetando además cada nodo con su restricción métrica unaria. Se introduce el nodo especial d_0 en V_D etiquetado con $[0, 0]$, para representar a la duración nula.

Ejemplo 4. La información temporal del ejemplo 1 puede representarse mediante una APDN. Sean $b^-, b^+, f^-, f^+, j^-, j^+$ los instantes en que Bob, Fred y John, respectivamente, salen de casa y llegan al trabajo. Los grafos $G_{AP} = (V_P, E_P)$ y $G_{AD} = (V_D, E_D)$, mostrados en la figura 3, especifican todas las restricciones cuantitativas y cualitativas que pueden extraerse del ejemplo.

Lema 2. Las redes PDN y TCSP son casos especiales de redes APDN.

Como consecuencia de ello y del teorema 1, el análisis de consistencia en redes APDN es también un problema NP-completo. Por tanto, trabajaremos primero sobre el caso de APDN simple.

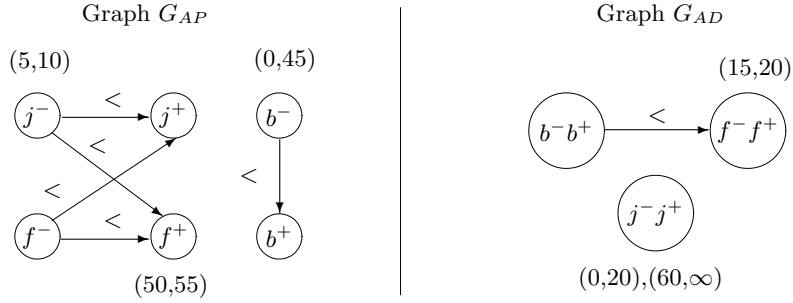


Figura 3. Representación gráfica del ejemplo 1

3.2 Tareas de razonamiento en una APDN simple

La información cuantitativa representada en una APDN corresponde a las restricciones métricas de un TCSP. Si todas ellas están dadas por intervalos simples, tenemos el caso clásico de un STP que puede resolverse en tiempo polinomial con un algoritmo de camino consistencia [8]. En caso contrario, necesitamos una función como la presentada en la figura 4, MIN-SAPDN, que parte de una red-APDN simple Σ_{APD}^S y decide su consistencia, devolviendo en su caso un escenario consistente con dominios mínimos.

1. if CSPDN ($Qual(\Sigma_{APD}^S), G_P, G_D$) then
2. let G_P^R and G_D^R be the reduced graphs of G_P and G_D ;
3. let $t_p \equiv X_1 < X_2 < \dots < X_p$ be the topological ordering in G_P^R ;
4. let $t_d \equiv Y_0 < Y_{i_1 j_1} < \dots < Y_{i_q j_q}$ be the topological ordering in G_D^R ;
5. else exit ('inconsistent');
6. $\Sigma_{APD}^R \leftarrow AUGMENT(\Sigma_{APD}^S, G_P^R, G_D^R)$;
7. apply AC-SA-ACPAN(G_{AP}^R, t_p) ; apply AC-SA-ACPAN(G_{AD}^R, t_d);
8. $G_{PD} \leftarrow OBTAIN-STP(\Sigma_{APD}^R)$;
9. for $r = 1$ to q ;
10. MINIMIZE (C_{i_r, j_r});
11. apply AC-SA-ACPAN(G_{AD}^R, t_d);
12. MINIMIZE ($C_{0,0}$);
13. MODIFY ($\Sigma_{APD}^S, \Sigma_{APD}^R$);
14. return (Σ_{APD}^S);

Figura 4. Función MIN-SAPDN ($\Sigma_{APD}^S, G_{AP}, G_{AD}$)

Teorema 4. (Navarrete [11]) *La función MIN-SAPDN encuentra un escenario consistente con dominios mínimos de una red APDN simple o detecta inconsistencia si tal escenario no existe. Su complejidad en tiempo es $O(d \times n^2)$*

El problema de encontrar una solución para una APDN simple no es tan sencillo como en el caso de una PDN o un STP. Ahora, cada vez que se calcula un valor v para una variable x (punto o duración), el dominio de x debe ser actualizado a $[v, v]$ y hay que volver a minimizar. Este proceso se repite hasta que cada dominio contiene un único valor, que nos da la solución buscada. En la figura 5 se muestra la función SAPDN-SOL que encuentra una solución para una red APDN simple consistente.

1. let Σ_{APDN}^R be the augmented reduced network of Σ_{APDN}^S ;
2. let $t_p \equiv X_1 < X_2 < \dots < X_p$ be the topological ordering in G_{AP}^R ;
3. let $t_d \equiv Y_0 < Y_{i_1 j_1} < \dots < Y_{i_q j_q}$ be the topological ordering in G_{AD}^R ;
4. let G_{PD} be the STP-graph of Σ_{APDN}^R ; let $v_0 \leftarrow 0$;
5. for $k = 1$ to p
6. if k is not a node of G_{PD} then select any $v_k \in C_k^R$;
7. else select any $v_k \in \bigcap_{i=0 \dots k-1} [v_i, v_i] \otimes C_{i,k}$; $C_{0,k} \leftarrow [v_k, v_k]$;
8. for $j = 1$ to $k - 1$ do $C_{j,k} \leftarrow C_{j,0} \otimes C_{0,k}$
9. $\Sigma_{APDN}^R \leftarrow \text{MIN-SAPDN}(\Sigma_{APDN}^R)$;
10. for each X_i in G_{AP}^R , for each $p_j \in X_i$ do $p_j \leftarrow C_{0,i}$;
11. end-for;
12. for each Y_{ij} in G_{AD}^R , for each $d_{km} \in Y_{ij}$ do $d_{km} \leftarrow C_{i,j}$;
13. let S_{APDN} be a solution given by the above instantiations;
14. return (S_{APDN});

Figura 5. Función SAPDN-SOL (Σ_{APDN}^S)

Teorema 5. (Navarrete [11]) *La función SAPDN-SOL encuentra una solución de una APDN simple consistente con dominios mínimos en $O(d \times n^3)$.*

4 Conclusiones

En este trabajo hemos mostrado dos formalismos, PDN y APDN, para integrar información temporal sobre puntos y duraciones, formados por dos redes binarias conectadas mediante relaciones ternarias. Esta forma de modelar el problema es crucial, ya que permite reutilizar, con las modificaciones apropiadas, una parte de los algoritmos para redes binarias previamente existentes.

En particular, el formalismo APDN subsume los modelos de redes PA aumentadas [7] y de redes TCSP [5]. Aunque decidir la consistencia en los casos generales es un problema NP-completo, hemos mostrado casos particulares para

los que existen algoritmos eficientes para las tareas básicas de razonamiento temporal.

El trabajo más reciente se ha dirigido a extender las redes APDN con restricciones métricas binarias sobre duraciones. Otra línea de trabajo futuro en la que estamos interesados consiste en descubrir nuevos fragmentos tratables con una potencia expresiva intermedia entre la de los modelos PDN simple y APDN simple, y la de los modelos generales PDN y APDN, pero manteniendo la simplicidad conceptual de los modelos y la eficiencia de los algoritmos.

Referencias

1. J. Allen. Maintaining knowledge about temporal intervals. *Communications of the ACM*, 26 (11): 832-843, 1983.
2. J. Allen, H. Kautz. A model of naive temporal reasoning. In J. Hobbs and R. Moore (Eds.), *Formal theories of the commonsense world*. Ablex, 251-268, 1985.
3. F. Barber. A metric time-point and duration-based temporal model. *SIGART Bulletin*, 3: 30-49, 1993.
4. T.L. Dean and D.V. McDermott. Temporal data base management. *Artificial Intelligence*, 32: 1-55, 1987.
5. R. Dechter, I. Meiri and J. Pearl. Temporal constraint networks. *Artificial Intelligence*, 49: 61-95, 1991.
6. H. Kautz and P. Ladkin. Integrating metric and qualitative temporal reasoning. In *Proceedings of AAAI-91*, 241-246, 1991.
7. I. Meiri. Combining qualitative and quantitative constraints in temporal reasoning. *Artificial Intelligence*, 87: 343-385, 1996.
8. U. Montanari. Networks of constraints: fundamental properties and applications to picture processing. *Information Science*, 7: 95-132, 1974.
9. I. Navarrete and R. Marin. Qualitative temporal reasoning with points and durations. In *Proceedings of IJCAI-97*, 1454-1559, 1997.
10. I. Navarrete, R. Marin, M. Cárdenas, M. Balsa. Un nuevo modelo tratable y eficiente para razonamiento temporal cualitativo. In *Actas de la VIII Conferencia de la Asociación Española para la Inteligencia Artificial CAEPIA-99*, Volumen I, 44-53. 1999.
11. I. Navarrete, A. Sattar, R. Wetprasit, R. Marín. On point-duration networks for temporal reasoning. *Artificial Intelligence*, 140: 39-70, 2002.
12. A. Pujari and A. Sattar. A new framework for reasoning about points, intervals and durations. In *Proceedings of IJCAI-99*, 1259-1264, 1999.
13. E. Schwalb and L. Vila. Temporal constraints: a survey. *Constraints*, 2,3: 129-150, 1998.
14. E. Tsang. *Foundations of constraint satisfaction*. Academic Press, 1993.
15. P. Van Beek. Reasoning about qualitative temporal information. *Artificial Intelligence*, 58: 297-326, 1992.
16. M. Vilain and H.Kautz. Constraint propagation algorithms for temporal reasoning. In *Proceedings of AAAI-86*, 377-382, 1986.
17. R. Wetprasit and A. Sattar. Temporal reasoning with qualitative and quantitative information about points and durations. In *Proceedings of AAAI-98*, 656-663, 1998.