GIMAC - UMA

"Grupo de Investigación de Matemática Aplicada en Computación"

de la Universidad de Málaga

www.gimac.uma.es

Investigador principal:

Inmaculada Pérez de Guzmán Molina

Componentes:

Gabriel Aguilera Venegas
Inma Fortes Ruiz
Jesús Medina Moreno
Francisco Rodríguez Sánchez
Iván Atencia McKillop
Gloria Gutiérrez Barranco
Angel Mora Bonilla
Sixto Sánchez Merino
Pablo Cordero Ortega
Javier Martínez del Castillo
Manuel Ojeda Aciego
Agustín Valverde Ramos

Colaboradores:

Alfredo Burrieza Muñiz
Manuel Enciso García-Oliveros
Carlos Rossi Jiménez

GIMAC - UMA

Líneas de trabajo:

- Deducción automática.
- Lógicas no estándar: fundamentos y aplicaciones.
- Teoría de categorías y álgebras abstractas para la Computación.
- Teoría de retículos y generalizaciones para la Computación.
- Métodos formales en bases de datos.

Deducción Automática

¿Puede una máquina pensar?

- Información explícita.
- Información implícita.

  Razonamos cuando no sólo somos receptores o transmisores de información, sino cuando concluimos, deducimos o inferimos nueva información.

Demostración Automática de Teoremas:

Dotar al software de una capacidad deductiva.

Deducción Automática

Se requiere (Martín-Löf) un estudio en tres etapas:

- Lenguaje formal.
- Semántica.
- Teoría de la demostración. Eficiencia.

Deducción Automática

Se requiere (Martín-Löf) un estudio en tres etapas:

- Lenguaje formal.
- Semántica.
- Teoría de la demostración. Eficiencia.

La equivalencia entre definición semántica y sintáctica de razonamiento válido se expresa afirmando que el par

(Semántica, Teoría de la Demostración)

constituye una Teoría Correcta y Completa

Deducción Automática

Lenguaje - Semántica

Definición 19 *Una lógica proposicional es una terna* $\mathrm{L} = (\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{I})$ *donde:*

- $\mathcal{L} = (L, op_1, \ldots, op_r)$ *es un lenguaje proposicional.*
- $\mathcal{M} = (M, D, op_1, \ldots, op_r)$ *es una matriz sobre* $\mathcal{L}$.
- $\mathcal{I}$ *es un conjunto de homomorfismos* $I : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$.

Si el conjunto $\mathcal{I}$ *coincide con el conjunto de todos los homomorfismos escribiremos* $\mathrm{L} = (\mathcal{L}, \mathcal{M})$.

Ejemplo 1 *Ver ejemplo de la Lógica Clásica Proposicional* 2

Definición 20 *Ver definiciones de validez, satisfacibilidad,...*22

Deducción Automática

Lenguaje - Semántica

- Lógicas
  - Clásicas
  - No Clásicas
    - Extensiones de la L.C.
      - Modales
      - Temporales
        - Flujo lineal: FNext, LN ...
        - Multiflujo: MAT Logic, ...
        - ⋮
      - ⋮
    - Desviaciones de la L.C.
      - Multivaluadas
      - Difusas
      - ⋮

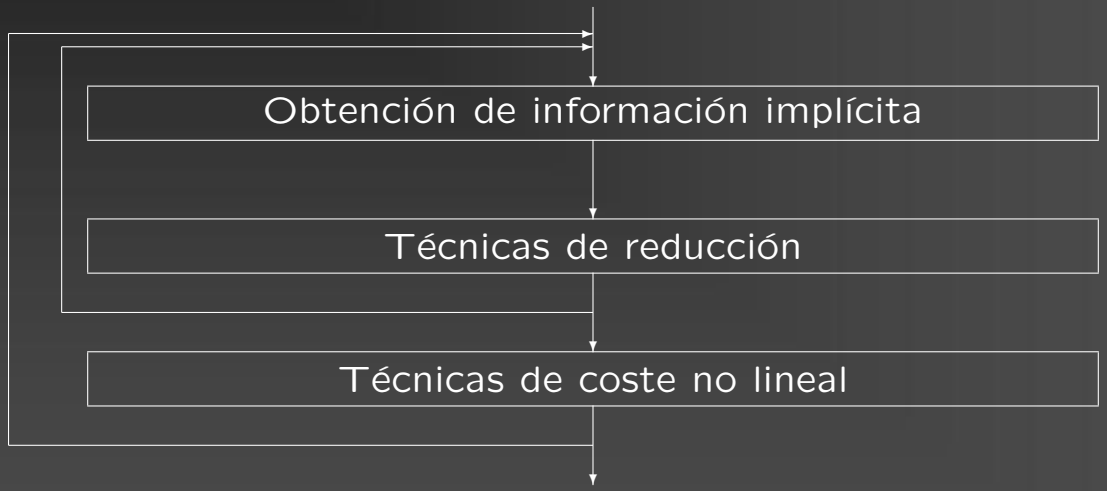
Deducción Automática

Teorías de la Demostración y Demostración Automática

- Basado en
  - Semántica
    - Tablas de verdad
    - Razonamiento con ejemplos
  - Sintaxis
    - Resolución
    - Tableau
    - TAS

Deducción Automática

Metodología TAS



Deducción Automática

Implicantes e implicados unitarios

Definición 21 *Sea* $\mathrm{L} = (\mathcal{L}, \mathcal{I})$ *una lógica proposicional. Definimos la relación binaria,* $\trianglelefteq$*, en* $\mathcal{L}$ *como:*

$$\phi \trianglelefteq \psi \text{ si y sólo si } \models \phi \rightarrow \psi$$

Decimos que ϕ *es implicante de* ψ *o que* ψ *es implicado de* ϕ*, si* $\phi \trianglelefteq \psi$*.*

Deducción Automática

Implicantes e implicados unitarios

Definición 21 *Sea* $\mathrm{L} = (\mathcal{L}, \mathcal{I})$ *una lógica proposicional. Definimos la relación binaria,* $\trianglelefteq$*, en* $\mathcal{L}$ *como:*

$$\phi \trianglelefteq \psi \text{ si y sólo si } \models \phi \rightarrow \psi$$

Decimos que ϕ *es implicante de* ψ *o que* ψ *es implicado de* ϕ*, si* $\phi \trianglelefteq \psi$*.*

En las lógicas que son extensión de la Lógica Clásica:

- $\trianglelefteq$ es un preorden en $\mathcal{L}$
- $(\mathcal{L}/_{\equiv}, \trianglelefteq)$ es un algebra de Boole.

Deducción Automática

Implicantes e implicados unitarios

- Fórmula unitaria: fórmula de $\mathcal{L}$ en la que no intervengan conectivas de aridad mayor a 1.
- Literal: clase de $(\mathcal{L}/_{\equiv}, \trianglelefteq)$ que contenga fórmulas unitarias.

En Lógica Clásica Proposicional:

$$\top, \bot, p, \neg p, \neg\neg p, \neg\neg\neg p, \ldots, q, \neg q, \neg\neg q, \ldots$$

son fórmulas unitarias y, si

$$\mathtt{Lit}(p) = \{\top, \bot, p, \neg p\}$$

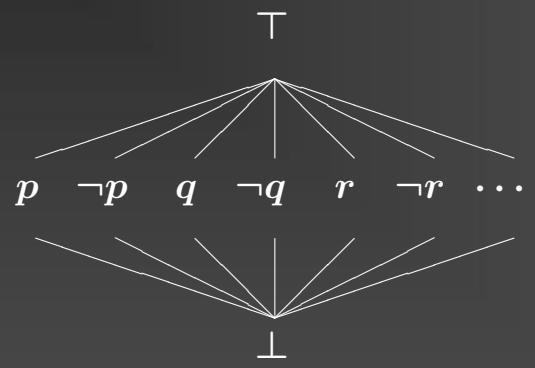
el conjunto de literales es

$$\mathtt{Lit} = \bigcup_{p \in L_0} \mathtt{Lit}(p)$$

Deducción Automática

Implicantes e implicados unitarios

En Lógica Clásica Proposicional $(\texttt{Lit}, \trianglelefteq)$ es el siguiente retículo:



Si los literales implicantes de ϕ son $\{\bot, p, q\}$ y los de ψ son $\{\bot, p, \neg q\}$

- $\{\bot, p\}$ son implicantes de $\phi \wedge \psi$.
- $\{\bot, p, q, \neg q, \top\}$ son implicantes de $\phi \vee \psi$.

Deducción Automática

Implicantes e implicados unitarios

- $(\mathcal{L}/\equiv, \trianglelefteq)$ es un álgebra de Boole.
- $\mathtt{Lit} \subseteq \mathcal{L}/\equiv$.
- Dada una fórmula ϕ, el conjunto de implicantes de ϕ es el ideal $(\phi]$.
- Nos interesa estudiar $(\phi] \cap \mathtt{Lit}$.

Trabajamos en el estudio de las condiciones necesarias/suficientes para que se pueda obtener la mayor cantidad de información (implicados e implicantes unitarios) con coste lineal.

Entre los requisitos que se deben cumplir tenemos que

el conjunto de literales tenga estructura de multirretículo

Esta estructura, generalización de la de retículo, juega un papel crucial en nuestro trabajo.

Deducción Automática

Formas Normales e Inducción

Un concepto muy importante en Demostración Automática es el concepto de Forma Normal.

En cada lógica temporal buscamos una Forma Normal que:

- Simplifique la casuística de fórmulas a estudiar.
- Sea fácilmente computable: COSTE LINEAL.
- Permita obtener la máxima información implícita con el menor coste.

En lógicas temporales, el problema de determinar eficientemente la información implícita obtenida por inducción sigue estando sin resolver.

$$\oplus p \wedge G(\neg p \vee \oplus p) \equiv Gp$$

$$Fp \wedge G(q \vee \neg p) \wedge G(\neg q \vee \oplus p) \equiv FG(p \wedge q)$$

MAT Logic

Multi-flow Asynchronic Temporal Logic

Es una nueva lógica temporal x modal con operadores no deterministas como relaciones de accesibilidad entre flujos de tiempo.

Principal objetivo: búsqueda de herramientas para razonar sobre comunicaciones entre sistemas con flujo de tiempo no necesariamente sincronizado.

MAT Logic

La utilidad de las lógicas modales en sistemas multi-agentes está ampliamente aceptada: para describir estados mentales y comportamiento de los agentes [Raoand Georgeff, 1992], para razonar sobre categorías sociales y obligaciones [Broersen et al, 2001] o cooperación [Ancona and Mascardi, 2004]...

La lógica temporal también ha demostrado ser una herramienta útil para la especificación y el razonamiento de sistemas interactivos y razonar sobre el comportamiento de los sistemas multi-agentes. Sin embargo, no es capaz de razonar sobre el comportamiento interno de estos sistemas [Manna, 1992; Nicola, 2004; Ramanujam, 1996].

MAT Logic

En la bibliografía existen diversas extensiones de la lógica temporal para resolver estas desventajas:

- En el caso de los sistemas multi-agentes, la extensión más simple consiste en considerar que todos los agentes están sincronizados [Ehrich, 1998; Ramanujam, 1996].
- Otras extensiones se consiguen vía difere4ntes formas de sincronización. Esta sincronización viene formalizada como funciones de visibilidad or accesibilidad. Por ejemplo, [Masini, 1992; Thiagarajan, 1998] introducen lógicas temporales con flujos de tiempo lineales en los que las funciones de visibilidad son bidireccionales, es decir, las relaciones entre estados (de diferentes flujos) son simétricas.

MAT Logic

Es necesaria de lógicas modales y temporales. Sin embargo, determinar que propiedades deben stidfacer estas lógicas no es tarea fácil [Torroni, 2004].

- En la bibliografía sobre lógicas temporales $\times$ modales [Thomason, 1984; Zanardo, 1996], habitualmente, los flujos de tiempo son lineales y están conectados por relaciones de equivalencia.
- En nuestros trabajos previos [LNAI2309, 2002; TIME, 2002; Acta Informatica 39, 2003], los flujos de tiempo se conectan mediante funciones de accesibilidad.
- En MAT Logic los flujos vienen conectados mediante operadores no deterministas.

MAT Logic

Objetivo:
una lógica capaz de razonar sobre comunicaciones entre sistemas.

- En ocasiones, las comunicaciones entre dos flujos de tiempo pueden ser descritas por una función.
- En muchos casos, el tipo de instante en el flujo imagen, pero, sin embargo, el instante concreto no es conocido. En consecuencia, la función no puede ser definida.
- En estas comunicaciones no se requiere sincronización.

Esto nos ha llevado a formalizar la accesibilidad entre distintos flujos de tiempo mediante operadores no deterministas.

Deducción Automática

Lenguaje - Semántica

Ejemplo 2 *Sea* $L_0 = \{p, q, r, \ldots, p_0, q_0, r_0, \ldots, p_1, q_1, r_1, \ldots\}$.
Consideramos la lógica proposicional $\mathrm{L} = (\mathcal{L}, \mathcal{M})$ *donde:*

- $\mathcal{L} = \langle L_0 \rangle = (L, \top, \bot, \neg, \vee, \wedge, \rightarrow)$ *de similaridad* $(0, 0, 1, 2, 2, 2)$ *es el lenguaje y*
- *la semántica viene dada por la matriz sobre él*

$$\mathcal{M} = (\{0, 1\}, \{1\}, 1, 0, \neg, \max, \min, \rightarrow)$$

donde

$$\neg : \{0, 1\} \longrightarrow \{0, 1\} \qquad \rightarrow : \{0, 1\} \longrightarrow \{0, 1\}$$
$$\neg(x) = 1 - x \qquad \rightarrow (x, y) = \max\{1 - x, y\}$$

Volver 19

Deducción Automática

Lenguaje - Semántica

Definición 22 *Sea* $\mathrm{L} = (\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{I})$ *una lógica proposicional con* $\mathcal{L} = \langle L_0 \rangle = (L, op_1, \ldots, op_r)$ *y* $\mathcal{M} = (M, D, op_1, \ldots, op_r)$.

- $\phi \in L$ *es satisfacible si existe una interpretación* I *tal que* $I(\phi) \in D$*; esta interpretación se denomina modelo de* ϕ.
- $\Phi \subseteq L$ *es satisfacible si existe un interpretación* I *tal que* $I(\Phi) \subseteq D$*; tal interpretación se denomina modelo de* Φ.
- *Decimos que* $\psi \in L$ *es consecuencia semántica de* $\Phi \subseteq L$ *si todo modelo de* Φ *es modelo de* ψ*; en tal caso escribimos* $\Phi \models_{\mathrm{L}} \psi$.
- $\phi \in L$ *se dice válida si todas las interpretaciones son modelos de* ϕ*. Se denota por* $\models_{\mathrm{L}} \phi$.
- $\phi, \psi \in L$ *se dicen equivalentes, denotado por* $\phi \equiv_{\mathrm{L}} \psi$*, si para cada interpretación* I *se verifica que* $I(\phi) = I(\psi)$.

Deducción Automática