# Independencia en la Teoría de la Posibilidad*

Luis M. de Campos, Juan F. Huete
Departamento de Ciencias de la Computación e I.A.
Universidad de Granada
18071-Granada, Espana
e-mail: lci(jhg)@robinson.ugr.es

**Resumen**

*Este trabajo se centra en el estudio del concepto de independencia para medidas de posibilidad. Se consideran diferentes alternativas, y se analizan sus propiedades. Además se realiza un estudio formal de las condiciones que, de verificarse, conducirían a definiciones apropiadas de independencia para posibilidades.*

**Palabras clave:** independencia condicional, medidas de posibilidad, condicionamiento.

## 1 Introducción

El concepto de irrelevancia o independencia entre sucesos o variables se ha identificado como uno de los más importantes a tener en cuenta para realizar tareas de razonamiento en dominios de conocimiento amplios y/o complejos de una forma eficiente. La dependencia es una relación que establece un cambio potencial en nuestra creencia actual sobre un suceso o una variable de un dominio de conocimiento, como consecuencia de un cambio específico de nuestro estado de conocimiento sobre otro suceso o variable de dicho dominio. Por tanto, si una variable X es considerada como independiente de otra variable Y, dado un estado de conocimiento Z, entonces nuestra creencia sobre X no variará como consecuencia de adquirir información adicional sobre Y. En otras palabras, la independencia permite modularizar el conocimiento de forma que solo es necesario consultar la información relevante para la cuestión particular en la que estemos interesados, en lugar de tener que examinar una base de conocimiento completa. De este modo, los sistemas de razonamiento que tienen en cuenta consideraciones sobre la independencia pueden ganar en eficiencia. Este es el caso de las redes causales o redes de creencia ([10, 11, 17]), que codifican las relaciones de independencia mediante grafos.

*Este trabajo ha sido financiado por la DGICYT, Proyecto PB92-0939

En el contexto de sistemas que manejan conocimiento con incertidumbre, el concepto de independencia e independencia condicional solo ha sido estudiado profundamente para medidas de probabilidad (ver, por ejemplo, [3, 9, 15]), aunque ya existen algunas aportaciones para otros formalismos de tratamiento de la información con incertidumbre ([1, 2, 14]), así como trabajos que consideran la independencia desde un punto de vista abstracto ([11, 12, 16]).

El objetivo de este trabajo es investigar diversas formas de definir relaciones de independencia en el contexto de la teoría de la posibilidad [18, 6].

El trabajo se estructura en 7 secciones: en la sección 2 se introducen las propiedades que habitualmente se considera que una relación de independencia debería verificar, y que conducen a un esquema de representación mediante grafos. Los conceptos de marginalización y condicionamiento para medidas de posibilidad que se emplean en el trabajo se describen en la sección 3. La sección 4 estudia diferentes definiciones alternativas de independencia para posibilidades, basadas en un concepto de condicionamiento propio de la teoría de Dempster-Shafer. Manteniendo todavía el mismo concepto de condicionamiento, en la sección 5 se hace un breve estudio de las propiedades que una relación de similaridad entre posibilidades debería verificar para que su empleo en la definición de independencia resultase adecuado. En la sección 6 se consideran otras definiciones de independencia, pero ahora tomando como base otro concepto de condicionamiento, más usual en un contexto posibilístico. Finalmente, la sección 7 contiene algunas conclusiones.

## 2 Axiomática para las relaciones de independencia

El estudio en profundidad de la idea de independencia condicional en la teoría de la probabilidad (también en teoría de bases de datos o en teoría de grafos) ha conducido a la identificación de una serie de propiedades que parece razonable exigir a toda relación que intente capturar la noción intuitiva de independencia, y que por tanto se han postulado como una axiomática para las relaciones de independencia [11]. Si denotamos por $I(X,Y|Z)$ la aserción '$X$ es independiente de $Y$ dado $Z$', donde $X$,$Y$ y $Z$ representan conjuntos (disjuntos) de variables de un determinado dominio de conocimiento, tales propiedades son las siguientes:

- A1 Independencia trivial:
  $I(X,\emptyset|Z)$
- A2 Simetría.
  $I(X,Y|Z) \Rightarrow I(Y,X|Z)$
- A3 Descomposición:
  $I(X,Y\cup W|Z) \Rightarrow I(X,Y|Z)$
- A4 Unión débil.
  $I(X,Y\cup W|Z) \Rightarrow I(X,W|Z\cup Y)$
- A5 Contracción:
  $I(X,Y|Z)$ y $I(X,W|Z\cup Y) \Rightarrow I(X,Y\cup W|Z)$
- A6 Intersección.
  $I(X,Y|Z\cup W)$ y $I(X,W|Z\cup Y) \Rightarrow I(X,Y\cup W|Z)$

donde $X,Y,Z,W$ son conjuntos disjuntos arbitrarios de variables.

De todas estas propiedades, tal vez la menos universal es la de Intersección (por ejemplo, solo las distribuciones de probabilidad estrictamente positivas la verifican, mientras que cualquier distribución de probabilidad verifica las restantes propiedades).

Dependiendo de qué propiedades se verifiquen en una situación concreta, para un modelo de independencia concreto, es posible construir diferentes tipos de grafos, por diferentes medios, que exhiban (a través de los criterios de separación o d-separación en grafos) todas o algunas de las independencias representadas en el modelo de partida ([11, 17]).

# 3 Medidas de posibilidad. Marginalización y condicionamiento

Si consideramos como referencial un conjunto finito $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ (o bien una variable $X$ cuyos valores posibles son $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$), una medida de posibilidad definida sobre $X$ es una función de conjunto

$$\Pi : \mathcal{P}(X) \to [0,1],$$

tal que

1. $\Pi(X)=1$,
2. $\Pi(A\cup B)=\max(\Pi(A),\Pi(B)),\ \forall A,B\subseteq X$

Asociada con la medida de posibilidad $\Pi$, se define la distribución de posibilidad

$$\pi : X \to [0,1]$$

mediante

$$\pi(x)=\Pi(\{x\}),\ \forall x\in X.$$

La información contenida en la distribución de posibilidad es suficiente para reconstruir la medida de posibilidad, puesto que

$$\forall A\subseteq X,\ \Pi(A)=\max_{x\in A}\pi(x).$$

Dada una distribución de posibilidad bidimensional $\pi$ definida sobre el producto cartesiano $X$x$Y$, la distribución de posibilidad marginal sobre $X$, $\pi_X$ (por simplicidad, y siempre que no de lugar a confusión, eliminaremos el subíndice), se define siempre mediante

$$\pi_X(x)=\max_{y\in Y}\pi(x,y),\ \forall x\in X.$$

En cambio, el concepto de distribución de posibilidad condicional no es tan universal, existen diferentes alternativas para su definición. Nosotros consideraremos principalmente las siguientes:

1.- La distribución de posibilidad sobre $X$ condicionada al suceso $[Y=y]$, $\pi_d(.|y)$, se define mediante

$$\pi_d(x|y)=\frac{\pi(x,y)}{\pi(y)}=\frac{\pi(x,y)}{\max_{x'\in X}\pi(x',y)}$$

que no es más que una de las definiciones habituales de condicionamiento para medidas de plausibilidad de Dempster-Shafer [4, 13], concretamente la regla de Dempster de condicionamiento, para el caso particular de medidas de posibilidad.

2.- La distribución de posibilidad sobre $X$ condicionada al suceso $[Y=y]$, $\pi_h(.|y)$, se define mediante

$$\pi_h(x|y)=\begin{cases}\pi(x,y) & \text{si } \pi(x,y)<\pi(y)\\ 1 & \text{si } \pi(x,y)=\pi(y)\end{cases}$$

Una versión ligeramente diferente de esta definición fue propuesta en [8], como la solución de la ecuación

$$\pi(x,y)=\pi(x|y)\wedge\pi(y),\ \forall x\in X.$$

$\pi_h$ resulta ser la solución menos específica de esta ecuación [7].

Obviamente estas definiciones de distribuciones de posibilidad marginales y condicionales pueden generalizarse de forma inmediata al caso n-dimensional.

# 4 Definiciones de independencia posibilística

Consideremos un conjunto finito de variables $\mathcal{U}$, sobre el que disponemos de una distribución de posibilidad n-dimensional $\pi$. Dados tres subconjuntos (disjuntos) de variables de $\mathcal{U}$, $X$, $Y$ y $Z$, representaremos mediante $I(X,Y|Z)$ la sentencia X es condicionalmente independiente de Y dado Z, para el modelo de independencia asociado a la distribución $\pi$. Denotaremos por $x, y, z$ los valores genéricos que las variables respectivas pueden tomar. Los valores de, por ejemplo $Y \cup Z$, se denotarán simplemente mediante $yz$

La forma más obvia de definir la independencia condicional es proceder de forma similar al caso probabilista, es decir, mediante la factorización de la distribución conjunta de $X, Y, Z$. Esta idea es la considerada en [14], en el contexto más general de los sistemas basados en valuaciones. En nuestro caso, esta idea, empleando el condicionamiento de Dempster, da lugar a:

$$I(X, Y|Z) \Leftrightarrow \pi_d(x|yz) = \pi_d(x|z),$$

es decir, el conocimiento sobre el valor de la variable $Y$ no modifica nuestra información sobre los valores de $X$, una vez que se conoce el valor de la variable $Z$; $x, y, z$ son valores arbitrarios de las variables $X, Y, Z$, con la única restricción de que las medidas condicionales implicadas estén definidas, es decir, que $\pi(yz) \neq 0$.

Esta definición cumple las propiedades A1–A5, y si la distribución de posibilidad $\pi$ es estrictamente positiva, también cumple A6.

El problema con esta definición es, en nuestra opinión, que es excesivamente estricta, habida cuenta que se exige la igualdad de las distribuciones, y que éstas representan un conocimiento impreciso. El problema se agrava en el caso (habitual) de que las distribuciones tengan que ser estimadas, a partir de datos o de juicios humanos.

La definición anterior supone que nuestra información sobre $X$ permanece inalterada al condicionar a $Y$. Una idea alternativa podría ser considerar que se da la independencia cuando al condicionar a $Y$ no se gana información adicional sobre los valores de $X$ (pero se podría llegar a perder). El concepto de que una distribución de posibilidad sea más o menos informativa que otra es capturado adecuadamente por la siguiente definición de inclusión [5]: Dadas dos distribuciones de posibilidad $\pi$ y $\pi'$, se dice que $\pi'$ está incluida en (proporciona menos información que) $\pi$ si y solo si $\pi(x) \leq \pi'(x)\ \forall x$.

Empleando la relación de inclusión entre posibilidades, la idea anterior se puede expresar mediante

$$I(X, Y|Z) \Leftrightarrow \pi_d(x|yz) \geq \pi_d(x|z)$$

Desgraciadamente esta definición no cumple la propiedad A4 (unión débil), aunque si cumple A1–A3 y A5. El problema creemos que se encuentra en el hecho de que no se ha llevado hasta sus últimas consecuencias la idea de independencia como no ganancia de información: si al condicionar se pierde información, parece más conveniente 'quedarnos como estábamos'. Esto puede ser debatible, pero representa una especie de regla por defecto: si para un contexto muy específico se carece de información, emplear la información disponible en un contexto menos específico. En términos prácticos, esta idea implica un cambio en la definición de condicionamiento:

$$\pi_{d_c}(x|y) = \begin{cases} \pi(x) & \text{si } \pi_d(x|y) \geq \pi(x)\ \forall x \\ \pi_d(x|y) & \text{si } \exists x' \text{ tal que } \pi_d(x'|y) < \pi(x') \end{cases}$$

Empleando este condicionamiento, la nueva definición de independencia es

$$I(X, Y|Z) \Leftrightarrow \pi_{d_c}(x|yz) = \pi_{d_c}(x|z).$$

Esta definición satisface las propiedades A1 y A3–A6 (incluso para distribuciones no estrictamente positivas se cumple la propiedad de intersección). No verifica la simetría (pero ésta es una propiedad fácil de recuperar: basta definir una nueva relación $I'(.,.|.)$ mediante $I'(X, Y|Z) \Leftrightarrow I(X, Y|Z)$ y $I(Y, X|Z)$, para obtener la simetría).

Otro enfoque muy diferente para definir el concepto de independencia consiste en considerar que las distribuciones $\pi_d(x|yz)$ y $\pi_d(x|z)$ sean similares en algún sentido. Así pues, si $\simeq$ es una relación en el conjunto de las distribuciones de posibilidad, se definiría la independencia mediante

$$I(X, Y|Z) \Leftrightarrow \pi_d(x|yz) \simeq \pi_d(x|z).$$

Existen diversas alternativas para definir la relación $\simeq$; veamos algunas de ellas:

Si pensamos que una distribución de posibilidad esencialmente establece una ordenación entre los valores que la variable sobre la que la distribución proporciona información puede tomar, considerando que la cuantificación de los grados de posibilidad es secundaria, entonces podríamos decir que dos distribuciones de posibilidad son similares si establecen la misma ordenación. Más formalmente, podemos definir la relación $\simeq$ mediante

$$\pi \simeq \pi' \Leftrightarrow \forall x, x' [\pi(x) < \pi(x') \Leftrightarrow \pi'(x) < \pi'(x')].$$

La independencia definida mediante esta relación (que podríamos llamar de 'isoordenación') verifica las propiedades A1 y A3–A5, y también A6 para distribuciones estrictamente positivas; sin embargo no verifica la simetría.

Otra alternativa es hablar de similaridad entre distribuciones cuando los grados de posibilidad de las distribuciones para cada valor sean parecidos. Más concretamente, sea $m$ un entero positivo cualquiera, y sean $\{\alpha_k\}_{k=0,\ldots,m}$ tales que $\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_{m-1} < \alpha_m$, con $\alpha_0 = 0$ y $\alpha_m = 1$. Si denotamos $I_k = [\alpha_{k-1}, \alpha_k)$, $k = 1, \ldots, m-1$, y $I_m = [\alpha_{m-1}, \alpha_m]$, entonces definimos la relación $\simeq$ mediante

$$\pi \simeq \pi' \Leftrightarrow \forall x\ \exists k \in \{1, \ldots, m\} \text{ tal que } \pi(x), \pi'(x) \in I_k$$

Esta definición es equivalente a la siguiente, establecida en términos de los $\alpha$-cortes de la distribución

$$\pi \simeq \pi' \Leftrightarrow C(\pi, \alpha_k) = C(\pi', \alpha_k)\ \forall k = 1, \ldots, m-1$$

donde $C(\pi, \alpha) = \{x \mid \pi(x) \geq \alpha\}$. La idea es también equivalente a discretizar el intervalo $[0, 1]$ (el rango de variación de las distribuciones), y decir que dos distribuciones son similares si sus respectivas discretizaciones coinciden. La relación de independencia definida en estos términos verifica las propiedades A1 y A3–A6 (aunque A6 solo para distribuciones estrictamente positivas), y de nuevo falla la simetría.

Por último, una tercera alternativa para definir $\simeq$ está basada en la siguiente idea: considerar un umbral $\alpha_0$, a partir del cual se considera interesante discriminar entre los grados de posibilidad de dos distribuciones, de forma que los valores cuyos grados de posibilidad sean inferiores al umbral no se consideran relevantes. En términos de los $\alpha$-cortes de las distribuciones, esta relación $\simeq$ se expresaría de la siguiente forma:

$$\pi \simeq \pi' \Leftrightarrow C(\pi, \alpha) = C(\pi', \alpha)\ \forall \alpha \geq \alpha_0,$$

que resulta equivalente a

$$\begin{aligned} \pi \simeq \pi' \Leftrightarrow \quad & C(\pi, \alpha_0) = C(\pi', \alpha_0) \\ \text{y} \quad & \pi(x) = \pi'(x)\ \forall x \in C(\pi, \alpha_0) \end{aligned}$$

De nuevo, la independencia definida en términos de esta relación $\simeq$ verifica las propiedades A1, A3- A5 (y A6 para distribuciones estrictamente positivas), y no cumple A2.

# 5 Condiciones suficientes para los axiomas de independencia

En esta sección continuamos con la idea de definir la independencia $I(X, Y|Z)$ en términos de una relación de similaridad $\simeq$ entre las distribuciones de posibilidad condicionadas $\pi_d(x|yz)$ y $\pi_d(x|z)$, pero pretendemos estudiar qué tipo de propiedades de $\simeq$ son suficientes para garantizar que la relación de independencia así definida cumpla algunas de las propiedades o axiomas considerados anteriormente.

En primer lugar, es obvio que la Independencia trivial (A1) se cumplirá si $\simeq$ es una relación reflexiva. También es evidente que la transitividad de $\simeq$ garantiza la propiedad A5 (Contracción). Si además, $\simeq$ es simétrica, entonces puede deducirse que se verifica A3 (Descomposición) si y solo si se verifica A4 (Unión débil). Por tanto, parece que las relaciones de equivalencia $\simeq$ son buenas candidatas para definir la independencia.

Una condición suficiente para que se verifique A3 es que $\simeq$ cumpla la siguiente propiedad:

Sea $\{\pi_s\}$ una familia de distribuciones de posibilidad, y $\{\lambda_s\}$ una familia de números reales positivos. Entonces

$$\frac{\pi_s}{\lambda_s} \simeq \pi \Rightarrow \frac{\max_s \pi_s}{\max_s \lambda_s} \simeq \pi \tag{1}$$

Además, en caso de que las distribuciones sean estrictamente positivas, el cumplimiento de la propiedad anterior también garantiza que se verifica A6.

Por tanto, toda relación de independencia posibilística definida en términos de una relación $\simeq$ que sea de equivalencia y verifique (1) cumple las propiedades de Independencia trivial, Descomposición, Unión débil, Contracción e Intersección (aunque esta última solo para distribuciones estrictamente positivas). La única propiedad que queda fuera de este contexto es la Simetría, lo cual resulta curioso, puesto que es una de las propiedades de la independencia aparentemente más intuitiva. Evidentemente, las tres relaciones $\simeq$ definidas en la sección anterior son de equivalencia y cumplen (1).

# 6 Cambiando el operador de condicionamiento

En esta sección emplearemos $\pi_h$ como operador de condicionamiento en lugar de $\pi_d$, que ha sido el utilizado en las dos secciones anteriores. Continuando con la idea de independencia como no ganancia de información tras condicionar, podemos entonces definir

$$I(X, Y|Z) \Leftrightarrow \pi_h(x|yz) \geq \pi_h(x|z).$$

En este caso, a diferencia de lo que ocurría con $\pi_d$, la definición anterior verifica las propiedades A1-A5, pero en general no verifica A6 (Intersección). Además, esta definición resulta ser equivalente a la siguiente:

$$I(X, Y|Z) \Leftrightarrow \pi(xyz) = \pi(xz) \wedge \pi(yz).$$

Si consideramos el caso particular de independencia marginal (es decir, cuando $Z = \emptyset$), entonces obtenemos:

$$I(X, Y|\emptyset) \Leftrightarrow \pi(xy) = \pi(x) \wedge \pi(y),$$

es decir, el conocido concepto de no interactividad para medidas de posibilidad o conjuntos difusos. Por tanto, nuestro concepto de independencia es lo que podríamos llamar 'no interactividad condicional'.

Obsérvese que para este tipo de condicionamiento la única operación necesaria es la de comparación. Por tanto podríamos fácilmente considerar distribuciones de posibilidad valuadas en conjuntos diferentes del intervalo $[0, 1]$: bastaría usar un conjunto $(\mathcal{L}, \preceq)$, donde

$$\mathcal{L} = \{L_0, L_1, \ldots, L_n\}$$

y

$$L_0 \preceq L_1 \preceq \ldots \preceq L_n$$

es decir, un conjunto totalmente ordenado (por ejemplo, etiquetas lingüísticas), y definir medidas de posibilidad mediante

$$\Pi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{L}$$

verificando:

1. $\Pi(X) = L_n$,
2. $\Pi(A \cup B) = \vee_{\preceq}(\Pi(A), \Pi(B)),\ \forall A, B \subseteq X$,

donde $\vee_{\preceq}$ es el operador máximo (supremo) asociado al orden $\preceq$.

En esas condiciones podemos definir el condicionamiento y la independencia de exactamente la misma forma que antes, obteniendo las mismas propiedades.

Otra vía diferente de extensión (análoga a la que hemos considerado en la sección 5 para el otro condicionamiento) consistiría en considerar una relación $\approx$

sobre el conjunto de las medidas de posibilidad, y definir la independencia mediante

$$I(X,Y|Z) \Leftrightarrow \pi(xyz) \approx \pi(xz) \wedge \pi(yz).$$

En este caso se puede probar que para que esta definición de independencia cumpla los axiomas A1–A5, es condición suficiente que $\approx$ sea una relación de equivalencia compatible con la marginalización y la combinación de distribuciones de posibilidad (empleando el operador mínimo como operador de combinación).

Por otra parte si, continuando el paralelismo con la sección 4, definimos $\pi_{h_c}$ mediante

$$\pi_{h_c}(x|y) = \begin{cases} \pi(x) & \text{si } \pi_h(x|y) \geq \pi(x)\ \forall x \\ \pi_h(x|y) & \text{si } \exists x' \text{ tal que } \pi_h(x'|y) < \pi(x') \end{cases}$$

y la relación de independencia

$$I(X,Y|Z) \Leftrightarrow \pi_{h_c}(x|yz) = \pi_{h_c}(x|z),$$

entonces se cumplen todas las propiedades A1–A6 excepto la Simetría. Esta relación resulta ser más restrictiva que la no interactividad condicional, pues si se verifica la independencia con esta definición, también se verifica la no interactividad condicional, pero el recíproco no es cierto.

# 7 Conclusiones

El concepto de independencia, al igual que para otros formalismos de tratamiento de información con incertidumbre, es también importante para la teoría de la posibilidad. Sin embargo, y salvo contadas excepciones, creemos que ha sido un tema no muy estudiado hasta la fecha. En este trabajo hemos propuesto diversas alternativas para la definición de independencia posibilística, basadas casi todas ellas en la idea de condicionamiento, aunque empleando diferentes formulaciones. Además hemos estudiado sus características, contrastándolas con un conjunto de axiomas bien conocidos, que tratan de capturar la idea intuitiva de independencia condicional. Es evidente que queda mucho por hacer en este tema, desde profundizar mucho más en las cuestiones aquí estudiadas (como por ejemplo, las consecuencias de una definición no simétrica de independencia), hasta considerar otros puntos de vista, no necesariamente basados en la idea de condicionamiento. También es importante abordar el problema de la construcción de grafos de independencias para posibilidades, y los mecanismos de propagación en tales estructuras.

# Agradecimientos

Los autores están agradecidos a uno de los revisores anónimos por sus interesantes sugerencias, que han servido para mejorar este trabajo.

# Bibliografía


[1] Campos, L.M. de, Huete, J.F. Independence concepts in upper and lower probabilities, Uncertainty in Intelligent Systems, eds. B. Bouchon-Meunier, L. Valverde, R.R. Yager, North-Holland (1993), 49–59

[2] Campos, L.M. de, Huete, J.F. Learning non probabilistic belief networks, Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning and Uncertainty, Lecture Notes in Computer Science 747, eds. M. Clarke, R. Kruse, S. Moral, Springer Verlag (1993), 57–64.

[3] Dawid, A.P. Conditional independence in statistical theory, J.R. Statist. Soc. Ser. B 41 (1979), 1–31.

[4] Dempster, A.P. Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping, Ann. Math. Stat. 38 (1967), 325–339.

[5] Dubois, D., Prade, H. A set-theoretic view of belief functions, International Journal of General Systems 12 (1986), 193–226.

[6] Dubois, D., Prade, H. Possibility Theory: An approach to computerized processing of uncertainty, Plenum Press, 1988.

[7] Dubois, D., Prade, H. Belief revision and updates in numerical formalisms–An overview, with new results for the possibilistic framework, Proceedings of the 13th IJCAI, Morgan and Kaufmann (1993), 620–625.

[8] Hisdal, E. Conditional possibilities, independence and noninteraction, Fuzzy Sets and Systems 1 (1978), 283–297.

[9] Lauritzen, S.L., Dawid, A.P., Larsen, B.N., Leimer, H.-G. Independence properties of directed Markov fields, Networks 20 (1990), 491–505.

[10] Pearl, J. Fusion, propagation and structuring in belief networks, Artificial Intelligence 29 (1986), 241–288.

[11] Pearl, J. Probabilistic reasoning in intelligent systems: Networks of plausible inference, Morgan and Kaufmann, 1988.

[12] Pearl, J., Geiger, D., Verma, T. Conditional independence and its representation, Kybernetika 25 (1989), 33–44.

[13] Shafer, G. A mathematical theory of evidence, Princeton University Press, 1976

[14] Shenoy, P.P. Conditional independence in uncertainty theories, Proceedings of the Eighth Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence, eds. D. Dubois, M.P. Wellman, B. D'Ambrosio, P. Smets, Morgan and Kaufmann (1992), 284–291

[15] Spohn, W. Stochastic independence, causal independence and shieldability, Journal of Philosophical Logic 9 (1980), 73–99.

[16] STUDENÝ, M. Attempts at axiomatic description of conditional independence, Kybernetika 25, Supplement to n. 3 (1989), 72–79.

[17] VERMA, T., PEARL, J. Causal networks: Semantics and expressiveness, Uncertainty in Artificial Intelligence 4, eds. R.D. Shachter,T.S. Levitt, L.N. Kanal, J.F. Lemmer, North-Holland (1990), 69–76.

[18] ZADEH, L.A. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility, Fuzzy Sets and Systems 1 (1978), 3–28.