UNIVERSIDAD DE GRANADA

E.T.S. DE INGENIERÍA

INFORMÁTICA

Departamento de Ciencias de la Computación
e Inteligencia Artificial

INTEGRACIÓN DE MODELOS DE REPRESENTACIÓN DE PREFERENCIAS EN PROBLEMAS DE TOMA DE DECISIONES CON MÚLTIPLES EXPERTOS

TESIS DOCTORAL

Francisco Chiclana Parrilla

Granada, Marzo de 2000

INTEGRACIÓN DE MODELOS DE REPRESENTACIÓN DE PREFERENCIAS EN PROBLEMAS DE TOMA DE DECISIONES CON MÚLTIPLES EXPERTOS

MEMORIA QUE PRESENTA

FRANCISCO CHICLANA PARRILLA

PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR EN MATEMÁTICAS

SEPTIEMBRE 1999

DIRECTORES

FRANCISCO HERRERA TRIGUERO
ENRIQUE HERRERA VIEDMA

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN
E INTELIGENCIA ARTIFICIAL

E.T.S. de INGENIERÍA INFORMÁTICA UNIVERSIDAD DE GRANADA

INTEGRACIÓN DE MODELOS DE REPRESENTACIÓN DE PREFERENCIAS EN PROBLEMAS DE TOMA DE DECISIONES CON MÚLTIPLES EXPERTOS

FRANCISCO CHICLANA PARRILLA

La memoria titulada **Integración de Modelos de Representación de Preferencias en Problemas de Toma de Decisiones con Múltiples Expertos,** que presenta D. Francisco Chiclana Parrilla para optar al grado de DOCTOR, ha sido realizada en el Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial de la Universidad de Granada bajo la dirección de los Doctores D. Francisco Herrera Triguero y D. Enrique Herrera Viedma.

Granada, Marzo de 2000

El Doctorando

Los Directores

Fdo.: Francisco Chiclana Parrilla

F. Herrera

E. Herrera-Viedma

AGRADECIMIENTOS

A los Doctores D. Francisco Herrera Triguero y D. Enrique Herrera Viedma sin cuya dirección, consejos, entusiasmo y paciencia esta memoria jamás habría podido completarse.

Por otro lado, quisiera agradecer en las pocas líneas que siguen a todas aquellas personas que de cualquier forma me han ayudado y prestado apoyo durante el largo periodo de realización de este trabajo.

En particular, quiero dejar constancia escrita de tal agradecimiento a: Oscar Cordón por su inestimable ayuda durante el periodo del programa de doctorado; a mi amigo Enrique Herrera Viedma por recogerme del pozo de la desilusión en el que caí al inicio del segundo curso de doctorado, y sacarme de él con fuerzas renovadas; a mis padres por todos los esfuerzos y penurias que han tenido que sufrir para poder ofrecerme la posibilidad de realizar estudios; a mi maestro de escuela Rafael Pérez Carrasquilla, que hoy es mi amigo, sin el cual no estaría hoy donde estoy y, lo más importante, no sería quien soy. Le debo tanto que no puedo pagárselo (menos mal que es mi amigo); a mis compañeros del I.E.S. Mediterráneo de Estepona que voluntariamente me prestaron sus opiniones para que las utilizara en esta memoria. Hago extensiva esta gratitud a todos los docentes que me han impartido clase alguna vez.

Finalmente, y lo más importante, dedico esta memoria a mi mujer, Sara Naylor, por tener que aguantar tanto a lo largo de la realización de ésta, en particular las malas traducciones al inglés que le presentaba y que como decía no significaban mucho para ella, pero sobre todo porque la quiero.

Introducción

A. Planteamiento

La toma de decisiones es una actividad normal y habitual en muchas de las tareas de cualquier empresa. El objetivo en cualquier proceso de decisión consiste en alcanzar una solución a un problema a partir de las experiencias y opiniones aportadas por diferentes expertos. El uso de modelos de decisión para ayudar a tomar una decisión final es una costumbre cada vez más extendida en el mundo empresarial. Estos modelos, comúnmente llamados *sistemas soportes de ayuda a la toma de decisiones*, mejoran notablemente el rendimiento de la gestión empresarial [12,34,40,46,61].

En el diseño de un modelo de decisión para resolver un problema concreto se distinguen claramente dos etapas [3]:

1. *Etapa de identificación* consistente en la identificación tanto de las alternativas como de los criterios apropiados para la resolución del problema.

2. *Etapa de elaboración* consistente por un lado en la elección de un método adecuado de representación, tratamiento y agregación de la información que sobre las alternativas se proporciona, sobre la base de los criterios considerados, y por otro lado en la definición de criterios de selección para la resolución del pro-

blema y de criterios de consenso a exigir para alcanzar un acuerdo sobre la solución final.

En esta memoria, estudiamos modelos de toma de decisión para problemas en los que suponemos que tanto el conjunto de alternativas como el conjunto de criterios son conocidos, discretos y finitos, es decir no trataremos para nada la primera etapa de un modelo de toma de decisión, pues como muy bien apuntan K.J. Arrow y H. Raynaud [3] ésta suele ser una operación aproximativa ya que lo más frecuente es que ambos conjuntos no tengan sus límites claramente fijados. Por el contrario, nos centraremos en el estudio de la segunda etapa para problema de Toma de Decisión con Múltiples Expertos (TDME) en la que la naturaleza de la información es numérica.

La mayoría de los problemas de toma de decisión con múltiples expertos o criterios estudiados hasta la fecha adoptan la suposición de homogeneidad en la información proporcionada por los expertos, es decir, los expertos están obligados a presentar la información sobre el problema utilizando todos la misma estructura de representación. Así, podemos citar problemas de TDME en los que la información se supone representada por órdenes de preferencia [48,57,58], o por funciones de utilidad [19,43,59], o por relaciones de preferencia [23,32,39,55,60]. Sin embargo, ésta no es una suposición muy realista ya que podemos encontrarnos con situaciones de decisión en las que tengamos expertos que o bien no son capaces de expresar sus opiniones mediante la misma estructura de representación o bien prefieran usar una estructura alternativa. En esta memoria, nos centramos en desarrollar modelos de decisión para problemas de TDME con evaluaciones numéricas que integren consistentemente las tres diferentes estructuras de representación de preferencias más usadas en la literatura, es decir, los órdenes de preferencia, las funciones de utilidad y las relaciones de preferencia binarias.

Cuando tenemos problemas de TDME en los que los expertos pueden presentar sus juicios de valor a través de diferentes estructuras de representación de preferencias entonces el establecer un modelo adecuado para tratar las diferentes estructuras de representación de modo que podamos combinar y procesar la información que contienen se convierte en una cuestión fundamental para solucionar dichos problemas. Una posible vía para conseguir establecer dicho modelo consistiría en basarlo en algún mecanismo de unificación de las distintas representaciones, tomando como base de tal unificación alguna de las mismas.

Las relaciones de preferencia binarias constituyen una de las estructuras más usadas y estudiadas en la literatura para modelar problemas de toma de decisiones, sobre todo en aquellos en los que se han de llevar a cabo procesos de agregación de preferencias [35,36,38,51]. Además, tanto los órdenes de preferencia como las funciones de utilidad se pueden incluir en la familia de relaciones de preferencia, como tendremos ocasión de demostrar a lo largo de esta memoria [19,43,55,58]. Por todo ello, hemos seleccionado las relaciones de preferencia binarias como base para la representación uniforme de las preferencias de los expertos.

B. Objetivos

El objetivo central de esta memoria es presentar diferentes modelos de decisión para problemas de TDME con evaluaciones numéricas que integren consistentemente las tres diferentes estructuras de representación de preferencias más usadas en la literatura, es decir, los órdenes de utilidad, las funciones de utilidad y las relaciones de preferencia binarias. Estos modelos de decisión para problemas de TDME con diferentes estructuras de representación de preferencias se presentan junto con sus correspondientes criterios o procesos de consenso y selección, necesarios para su aplicación.

En la mayoría de los modelos de decisión planteados en los que se hace uso de relaciones de preferencia binarias, observamos que fundamentalmente se trabaja con dos tipos de relaciones de preferencia:

1. Relaciones de preferencia difusas [23,32,34,50,51].
2. Relaciones de preferencia multiplicativas [54,55,56].

Por ello, el objetivo central de esta memoria se resume en los siguientes objetivos parciales:

I. El diseño de un modelo de decisión para problemas de TDME con evaluaciones numéricas que integre consistentemente las siguientes tres estructuras de representación de preferencias: (i) los órdenes de preferencia, (ii) las funciones de utilidad y (iii) las relaciones de preferencia difusas.

II. El diseño de un modelo de decisión para problemas de TDME con evaluaciones numéricas que integre consistentemente las siguientes tres estructuras de representación de preferencias: (i) los órdenes de preferencia, (ii) las funciones de utilidad y (iii) las relaciones de preferencia multiplicativas.

III. La integración de ambos modelos en un modelo general de decisión para problemas de TDME con evaluaciones numéricas que integre consistentemente las cuatro estructuras de representación de preferencias: (i) los órdenes de preferencia, (ii) las funciones de utilidad, (iii) las relaciones de preferencia multiplicativas y (iv) las relaciones de preferencia difusas.

C. Resumen

Los objetivos planteados en esta memoria se desarrollan a lo largo de la misma como sigue:

Para conseguir el primero de los objetivos parciales, estableceremos la relación existente entre órdenes de preferencia, funciones de utilidad y relaciones de preferencia difusas. Obtendremos la expresión general de las funciones de transformación de órdenes de preferencia y de funciones de utilidad en relaciones de preferencia difusa. Una vez conseguido esto, estaremos en condiciones de homogeneizar la información tomando como elemento base las relaciones de preferencia difusas. Una vez uniformada la información proporcionada por los expertos se puede aplicar uno cualesquiera de los modelos de selección diseñados para estos problemas. Nosotros presentamos un modelo de decisión basado en el concepto de mayoría difusa usando las funciones de transformación obtenidas, y que resulta ser consistente.

Para el segundo de estos objetivos parciales, de igual modo, estableceremos la relación existente entre órdenes de preferencia, funciones de utilidad y en este caso relaciones de preferencia multiplicativas. Obtendremos y presentaremos la expresión general de las funciones de transformación de órdenes de preferencia y funciones de utilidad en relaciones de preferencia multiplicativas. Así mismo, presentamos un modelo de decisión consistente basado en las relaciones de preferencia multiplicativas.

Para el tercero de los objetivos parciales, estudiamos la función que transforma las relaciones de preferencia difusas en relaciones de preferencia multiplicativas. Si las relaciones de preferencia multiplicativas son consistentes entonces dicha función actúa de forma coherente pues se obtiene la misma solución al problema TDME tanto si se utiliza un tipo de relaciones de preferencia o las correspondientes relaciones de preferencia transformadas.

Obtenida esta última función de transformación quedará establecida la relación entre las cuatro diferentes estructuras de representación de preferencias, y por tanto estaremos en condiciones de presentar un modelo general de decisión para problemas de TDME que integre consistentemente las cuatro representaciones de preferencia. Las funciones de transformación mencionadas generalizan las funciones habitualmente utilizadas en estos casos, y en particular las sugeridas en [19,43,54,58,59,60].

Más detalladamente, en el Capítulo 1 se introduce el problema de TDME, así como las cuatro diferentes estructuras de representación de preferencias, y el proceso de resolución de un problema TDME, en concreto los dos procesos a desarrollar antes de obtener una solución final del problema, así como las herramientas necesarias para llevar a cabo estos dos procesos.

En el Capítulo 2 se presenta un método para integrar la representación de preferencias basada en órdenes de preferencia y en relaciones de preferencia difusa. También en el capítulo 2, se presenta un método para integrar la representación de preferencias basada en funciones de utilidad y en relaciones de preferencia difusas.

En el Capítulo 3 se desarrolla un método para integrar la representación de preferencias basada en órdenes de preferencia, funciones de utilidad y en relaciones de preferencia multiplicativas.

En el Capítulo 4 se presenta un método para integrar la representación de preferencias basada relaciones de preferencia multiplicativas y relaciones de preferencia difusas. También se diseña un modelo de selección de alternativas cuyas características más importantes son las siguientes:

a) Admite diferentes estructuras de representación de preferencias: órdenes de preferencia, funciones de utilidad, relaciones de preferencia multiplicativas y relaciones de preferencia difusas.

b) Utiliza las relaciones de preferencia difusas como base de la representación uniforme de las preferencias.

c) Obtiene la solución al problema de TDME en tres pasos:

c.1. Representación uniforme de la información.
c.2. Agregación de la información uniforme.
c.3. Explotación de la información agregada.

d) La agregación de la información está basada en el concepto de mayoría difusa.

e) La explotación de la información es guiada por dos grados de selección: el grado de dominancia guiado por cuantificador y el grado de no-dominancia guiado por cuantificador.

El capítulo 5 se dedica al diseño de un modelo de consenso para problemas de TDME en los que la información se supone representada por las mencionadas cuatro representaciones de preferencias. Todo proceso de consenso suele estar coordinado por un moderador y hace referencia a cómo alcanzar el mayor grado de acuerdo entre los expertos, aunque éste no sea ideal, sobre la solución del problema. En este sentido, diseñamos un modelo de consenso dinámico e iterativo, que consta de dos fases: (i) expresión de opiniones y (ii) discusión en grupo o cambio de opiniones. Este modelo se basará en dos criterios de consenso:

a) Una medida de consenso con la que se evalúa en la primera fase el consenso existente entre todos los expertos y que utilizamos para guiar el proceso de consenso y validar la solución final del problema.

b) Una medida de proximidad con la que evaluamos el acuerdo (grado de coincidencia) entre las soluciones individuales de cada experto y la solución colectiva temporal. Se utiliza esta medida para guiar a los expertos en la segunda fase, es decir en la modificación de sus opiniones. Para esto, proponemos reglas sencillas y simples con las que diseñar un mecanismo de realimentación el cual puede utilizarse como sustituto del moderador en la mencionada fase de discusión.

Por último, en el Capítulo 6 se presentan las conclusiones, así como los trabajos futuros que pensamos realizar y que están asociados al estudio realizado. Finalmente, la memoria se completa con la bibliografía más relevante utilizada en la elaboración de la misma.

Capítulo 1

Los Problemas de Toma de Decisiones con Múltiples Expertos y Diferentes Estructuras de Preferencia

Este Capítulo está dedicado a la presentación del problema que trata la memoria y que constituye el origen de todas las aportaciones que hay en la misma: el problema de la TDME con diferentes estructuras de preferencias. Primero presentamos una introducción general a la TDME. A continuación analizamos uno de los elementos más importantes de cualquier problema de TDME, las diferentes estructuras de representación de preferencias, puesto que como se sabe las personas encargadas de tomar decisiones tratan de elaborar sus decisiones mediante el conocimiento y las experiencias esclarecedoras, expresadas éstas en forma de preferencias. En tercer lugar analizamos el proceso de resolución de un problema de TDME. Finalmente, puesto que la solución final de cualquier problema de TDME ha de ser la de mayor aceptación por parte de todo el conjunto de expertos o criterios, presentamos el concepto de mayoría en los problemas de TDME.

1. Toma de Decisiones con Múltiples Expertos

La toma de decisiones, cuya esencia es básicamente encontrar la mejor opción de entre las disponibles, es una tarea con la que nos estamos enfrentando constantemente en la realización de cualquier actividad. Es obvio que la comparación de diferentes acciones, con respecto a su valía, no se puede hacer utilizando un único criterio o una única persona, sino que para ello es necesario o al menos deseable la utilización de varios criterios o fuentes de información. Ésto conlleva la utilización de múltiples esquemas de valuación, habiéndose convertido en un tema de gran importancia en investigación en la Teoría de la Decisión [12,23,28,32,34,40,56,73]. Nosotros en esta memoria no distinguimos entre "personas" y "criterios", por lo que interpretamos el proceso de decisión dentro del marco de toma de decisión con múltiples objetivos, expertos o criterios [38,39].

En un proceso de TDME se distinguen claramente dos etapas: (1) la etapa de identificación, que consiste en la selección de alternativas y en la selección de criterios apropiados, y (2) la etapa de elaboración o proceso de resolución, que consiste en la selección de un método adecuado de tratamiento y agregación de la información que sobre las alternativas se proporciona, en base a los criterios, y un método de mayoría ponderada. Nosotros no abordamos la primera etapa pues como bien apuntan K.J. Arrow y H. Raynaud [3] ésta suele ser una operación aproximativa, en el sentido de que los conjuntos de alternativas y criterios son diferentes para cada problema de TDME, y lo más frecuente es que sus límites no estén claramente fijados, por lo que nuestra metodología en esta memoria consiste en suponer dichos conjuntos conocidos, discretos y finitos. Por el contrario nos centraremos en la segunda etapa, proceso de resolución de un problema de TDME, cuando la información sobre el conjunto de alternativas es de naturaleza diversa.

El problema de TDME puede resumirse como sigue: se dispone de un conjunto de opciones o alternativas, $X = \{x_1, ..., x_n\}, (n \geq 2)$, y de un conjunto de criterios o expertos, $E = \{e_1, ..., e_m\}, (m > 2)$, cada uno de los cuales proporciona sus preferencias sobre dicho conjunto de opciones. De lo que se trata es de encontrar una solución, que será una o un conjunto de alternativas, que sea(n) la(s) de mayor aceptación por parte de todo el grupo de expertos. Aunque esta formulación básica del problema parece extremadamente simple, e incluso normal, no lo es en absoluto, ya que como se ha demostrado no importa qué procedimiento de elección de grupo se emplee, pues satisfará algún conjunto de condiciones plausibles y no a otro conjunto de condiciones igualmente plausibles [2], por lo que desarrollar procedimientos de elección nuevos o más sofisticados no parece muy prometedor, sino que más prometedor parece el modificar algunas suposiciones básicas de los procesos de TDME.

Una de las dificultades cruciales que nos encontramos en estos problemas de TDME es que el proceso de resolución debe apoyarse en algunos modelos formales de decisión; desarrollados desde un punto de vista matemático en el que la consideración de propiedades formales ha tenido prioridad sobre la consistencia humana, por lo que tienen poco en común con la toma real de decisiones, ya que en ellos una decisión se presenta como un acto de elección claro y preciso en un ambiente en el que objetivos, restricciones, información y consecuencias de las posibles acciones se suponen conocidas con total precisión. El único componente en el que se permite incertidumbre es en la ocurrencia de los diferentes estados de la naturaleza, para lo cual se permiten descripciones probabilísticas. Sin embargo, cuando la incertidumbre es de naturaleza cualitativa, el uso de otras técnicas o herramientas es necesario. Esto ha dado lugar a que a menudo los expertos no estén dispuestos a aceptar resultados obtenidos con estos modelos, los cuales por otro lado son válidos desde un punto de vista matemático.

Como resultado de este choque entre teoría y práctica, se han realizado intentos por incorporar algún tipo de consistencia humana, como primer paso para la incorporación de inteligencia, en modelos de toma de decisiones. Entre estos intentos están aquellos problemas en los que se reemplaza una optimización estricta por otra “mucho más suave”, en la que se busca la consecución de ciertos niveles de satisfacción. También ha habido intentos para alcanzar la mencionada consistencia humana por medio de herramientas basadas en lógica difusa [22,31,34,36,37,61,73]. Entre los problemas estudiados con esta vía se encuentran la toma de decisiones con múltiples criterios o expertos, la toma de decisiones en múltiples etapas, la toma de decisiones en grupo, así como la formación de consenso [12,23,31,34,36].

En todos estos problemas de TDME se han establecido procedimientos para combinar las opiniones o información disponible sobre las alternativas con respecto a los distintos puntos de vista. La mayoría de los procedimientos están basados en la comparación de las alternativas por parejas, en el sentido que los procesos están ligados a cierto grado de credibilidad o preferencia de una cualquiera de las alternativas con respecto al resto, incluso cuando cada alternativa tiene asociada una valuación (utilidad, valor físico o monetario) para cada punto de vista. En este último caso, las parejas de alternativas pueden compararse de una forma transitiva basándose en dichas valuaciones como veremos en próximos capítulos de la memoria.

Un aspecto interesante de los problemas de TDME es el del tratamiento de la subjetividad inherente, imprecisiones y vaguedades en la articulación de opiniones de los expertos. Los Conjuntos Difusos han sido utilizados en este campo desde hace tiempo. En este sentido hemos de apuntar que la Teoría de Conjuntos Difusos puede proporcionar la flexibilidad necesaria para representar la incertidumbre resultante de una falta de conocimiento [4,6,23,25,37,51,68,73]. La metodología y herramientas difusas pueden utilizarse para trasladar información imprecisa y vaga en la especificación del problema en forma de relaciones difusas (objetivos difusos, restricciones difusas, preferencias difusas,…) o bien para diseñar un proceso de decisión intentando establecer órdenes de preferencia de alternativas. En [37] se han descrito diferentes problemas difusos de toma de decisión.

Por otro lado, uno de los elementos básicos subyacentes en los procesos de TDME es el concepto de mayoría, pues una solución ha de ser la(s) opción(es) mejor(es) aceptada(s) por el grupo, en el sentido de que la mayoría de sus miembros han de aceptar la solución, ya que en ninguna situación real, salvo en las obvias, la solución es aceptada por todos los expertos. Algunos de los problemas mencionados en la TDME están claramente relacionados con la concepción demasiado estricta del concepto mayoría. Una línea de razonamiento que puede adoptarse llegado este punto es la de intentar de alguna forma hacer que dicha concepción sea más cercana a su percepción humana, la cual suele ser más vaga y flexible que la anterior, pues el concepto de mayoría es distinto para distintas situaciones. Se podría decir que la acomodación de una mayoría menos rígida o mayoría difusa ayudaría a conseguir modelos de toma de decisiones en grupo más consistentes con la forma de actuación humana [29]. Es fácil ver que las manifestaciones más naturales de tal mayoría difusa son los llamados cuantificadores lingüísticos como por ejemplo “bastantes”, “casi todos”, “mucho más que la mitad”, “al menos la mitad”, etc., los cuales no pueden ser manejados por métodos formales convencionales, pues en éstos suelen considerarse tan sólo dos cuantificadores, a saber “al menos uno” y “todos” [30,64,66,70].

1.1. Etapas en la Resolución de los Problemas de TDME

En los problemas de TDME son dos los procesos a desarrollar antes de alcanzar una decisión final [29]: (1) proceso de consenso y (2) proceso de selección.

Ambos procesos han sido objeto de estudio por diversos autores en diferentes contextos de toma de decisiones [23,26,27,31,32,34,36]. El proceso de consenso hace referencia a cómo alcanzar el máximo grado de consenso o acuerdo entre los expertos sobre el conjunto de alternativa(s) solución, mientras que el proceso de selección hace referencia a cómo obtener el conjunto de alternativa(s) solución a partir de las preferencias expresadas por éstos. Ambos procesos se pueden aplicar de forma secuencial o bien conjuntamente en la resolución de un problema de TDME. En el primer caso, el proceso de consenso se aplica tantas veces como sea necesario hasta que se logre alcanzar un nivel de consenso satisfactorio, tras lo cual se procede a la aplicación del proceso de selección para la obtención de la solución final de consenso del problema de TDME.

Cuando el nivel de consenso no es satisfactorio, entonces los expertos son invitados a modificar sus opiniones para conseguir un acercamiento de sus posiciones de partida. En el segundo caso, se comienza aplicando el proceso de selección con el fin de conseguir una solución (temporal) del problema de TDME, tras lo cual se aplica el proceso de consenso para medir el nivel de consenso que dicha solución tiene entre el conjunto de expertos. Si este nivel de consenso es satisfactorio, entonces la solución será final, y en caso contrario se procedería como en el caso anterior, es decir instando a los expertos a modificar sus opiniones, tras lo cual vuelve a aplicarse de nuevo el proceso de selección y seguidamente el proceso de consenso. De este modo, un proceso de TDME se puede definir como un proceso dinámico e iterativo en el que los expertos van modificando sus posiciones de partida para la consecución de una solución de consenso. A veces, existe una persona singular, llamada moderador, encargada de dirigir todo el proceso de resolución del problema de TDME, el cual es encargado de hacer posibles recomendaciones a los expertos en el momento de necesidad de un cambio de posiciones por parte de éstos últimos (ver figura 1).

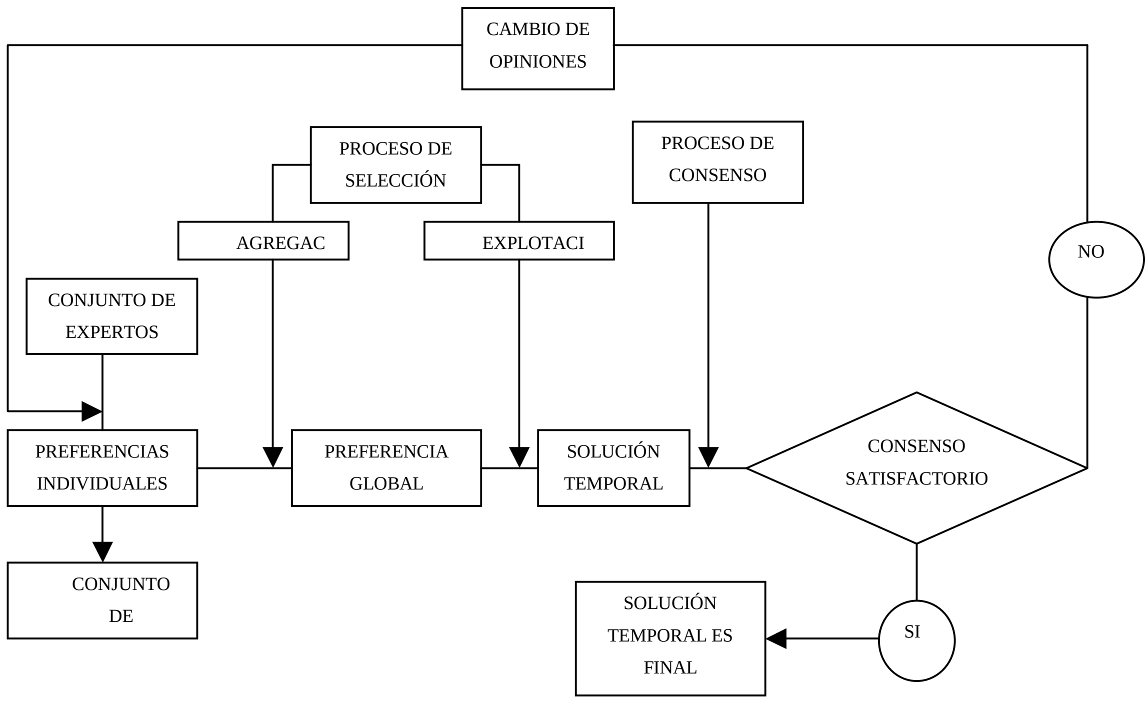

Figura 1. Diagrama del Proceso de TDME

El proceso de selección se subdivide a su vez en dos etapas antes de elegir la(s) alternativa(s) solución(es) [23]:

1. *Agregación*. En todo problema de TDME, sobre la base de la información que proporcionan o de que disponen un conjunto de expertos, un paso necesario es el que consiste en la forma de agregar dicha información. Este es un problema muy importante y por ello muy estudiado [2,4,7,20,21,23,63,65,72]. La fase de agregación comprende la aplicación de la operación que transforma las informaciones (preferencias) individuales en una información (preferencia) global, que proporciona el grado por el que una alternativa es estimada mejor que otra para el conjunto de expertos en el caso de utilizar la comparación de éstas por parejas.

2. *Explotación*. La fase de explotación actúa sobre la anterior información global de comparación para clarificar la decisión mediante la obtención de un orden parcial de las alternativas a partir del cual tomar la decisión. Este proceso puede realizarse de diversas formas, siendo el más habitual aquel que asocia un valor de utilidad global a cada alternativa, obteniendo de esta forma un orden natural de alternativas de mejor a peor.

2. Estructuras de Representación de Preferencias

En un problema de TDME, la información proporcionada o disponible sobre el conjunto finito de alternativas puede ser de naturaleza diversa, cabiendo distinguir la numérica y la lingüística. Nosotros en esta memoria asumimos que la naturaleza de la información es numérica, pudiendo ésta ser proporcionada mediante la utilización de diferentes estructuras de representación. Esto es así cuando la información es proporcionada por distintos expertos pues es natural pensar, y por tanto asumir, que personas diferentes proporcionarán sus opiniones a través de distintos tipos de representación de información. En todo caso, dicha información representará las opiniones en forma de preferencias de dichos expertos sobre las alternativas.

Con el objetivo de construir un marco flexible y por tanto de disponer de un mayor grado de libertad a la hora de representar las preferencias, asumimos un modelo de TDME en el que las preferencias pueden ser proporcionadas en una de las tres siguientes representaciones:

1. *Como un orden de preferencia de alternativas*. En este caso las alternativas están ordenadas de mejor a peor, sin información suplementaria alguna.

2. *Como una función de utilidad*. En este caso el experto proporciona una valuación real (valor físico o monetario) para cada alternativa, es decir, una función que asocia cada alternativa con un número real, que indica el grado de cumplimiento de dicha alternativa con respecto a su punto de vista.

3. *Como una relación de preferencia*. Este es el caso más habitual, es decir, cuando un experto proporciona una relación binaria sobre el conjunto de alternativas, es decir una función que asocia a cada par de alternativas un número real que refleja en cierto sentido el grado de preferencia de una alternativa sobre otra cualquiera. Dentro de éstas cabe destacar en la literatura dos tipos:

   3.1. *Las relaciones de preferencia difusas*. En este caso cada elemento de la relación se considera como un grado de preferencia de una alternativa sobre otra.

   3.2. *Las relaciones de preferencia multiplicativas*. En este caso cada elemento de la relación representa el número de veces que una alternativa es preferida a otra.

2.1. Órdenes de preferencia

En este caso, un experto, $e_k \in E$, proporciona sus preferencias sobre X en forma de un orden de preferencias individual, $O^k = \{o^k(1),...,o^k(n)\}$, donde $o^k(\cdot)$ es una función de permutación sobre el conjunto de índices $\{1,...,n\}$ para dicho experto [48,57,58]. De esta forma, un experto, de acuerdo con su punto de vista, proporciona un vector ordenado de alternativas de mejor a peor. Para todo orden de preferencia, O_k, supondremos, sin pérdida de generalidad, que cuanto menor es la posición de una alternativa en dicho orden mejor satisface dicha alternativa el criterio del experto que proporciona dicho orden, y viceversa. Por ejemplo si un experto proporciona sus preferencias sobre un conjunto de cuatro alternativas, $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, mediante el siguiente orden de preferencia (x_2, x_4, x_1, x_3) entonces $o(1) = 3, o(2) = 1, o(3) = 4, o(4) = 2$, lo que significará que la alternativa x_2 es la mejor para dicho experto, mientras que la alternativa x_3 es la peor.

2.2. Utilidades

En este caso, un experto, $e_k \in E$, proporciona sus preferencias sobre X a través de un conjunto de n valores de utilidad, $U^k = \{u_1^k,...,u_n^k\}, u_i^k \in [0,1]$, es decir, el experto asocia a cada alternativa una valuación de utilidad que representa el grado de cumplimiento de su punto de vista por parte de dicha alternativa [19,43,59]. Para cada conjunto de valores de utilidad, supondremos, sin perdida de generalidad, que cuanto mayor es la valuación de una alternativa mejor satisface dicha alternativa el objetivo del experto.

2.3. Relaciones de Preferencia

En teoría matemática clásica, las preferencias sobre un conjunto de alternativas se pueden modelar a través de una relación binaria R definida como sigue;

$$x_i R x_j \Leftrightarrow \text{" } x_i \text{ no es peor que } x_j \text{"}.$$

Esta definición considera una relación binaria como una relación de preferencia débil, e implica que dicha relación R es reflexiva. Con esta definición, es natural asociar un número real, llamado valuación y denotado $R(x_i, x_j) \in R$, el cual representa el grado de verdad de la afirmación " x_i no es peor que x_j", o grado de preferencia de la alternativa x_i sobre la alternativa x_j. Cuando el conjunto de alternativas es finito, podemos asociar una matriz P_R a la relación R, tomando como elemento ij-ésimo el valor $R(x_i, x_j)$. La interpretación de la relación R puede ser diferente para puntos de vista o expertos distintos. Las dos interpretaciones más habituales de una relación de preferencia son:

2.3.1. Relaciones de Preferencia Difusas

$R(x_i, x_j)$ se interpreta como la intensidad o grado de preferencia medida en $[0,1]$ de la alternativa x_i sobre la de la alternativa x_j. Usando la terminología de conjuntos difusos R es un subconjunto difuso del conjunto $X \times X$, por lo que a una relación de este tipo la llamaremos relación de preferencia difusa. En este caso la relación de preferencia difusa, representada por $P = (p_{ij})$, se asume verifica la siguiente condición de reciprocidad aditiva: $p_{ij} + p_{ji} = 1 \ \forall i, j$. En este tipo de relación de preferencia es habitual no definir los elementos de la diagonal principal. Esto es debido a que en los métodos utilizados para la elección de alternativas basados en la comparación de alternativas de dos en dos no tiene mucho sentido comparar una alternativa con ella misma. En todo caso, la comparación de una alternativa con ella misma no debería influir en el proceso de elección de la mejor o mejores alternativas. Si los elementos de la diagonal principal están definidos, en ese caso el valor de dichos elementos debería ser ½ como consecuencia de la anterior propiedad. Cuando se utiliza una relación de preferencia difusa, el elemento ij-ésimo de la matriz P se considera como una medida de la preferencia de la alternativa x_i sobre la alternativa x_j para el experto que proporcionó tal relación. Este tipo de relación de preferencia ha sido utilizada y aplicada satisfactoriamente por muchos autores en problemas de decisión con múltiples criterios o expertos [30,31,32,35,39,49,50,59,60].

2.3.2. Relaciones de Preferencia Multiplicativas

En este caso, $R(x_i, x_j)$ se interpreta como un indicador de la razón de intensidad de preferencia de la alternativa x_i sobre la de la alternativa x_j, es decir x_i es $R(x_i, x_j)$ veces tan buena como x_j. En este caso, la relación de preferencia, usualmente representada por $A = (a_{ij})$, se asume verifica la siguiente condición de reciprocidad multiplicativa: $a_{ij} \cdot a_{ji} = 1; a_{ij} > 0 \, \forall i, j$. Este tipo de relación de preferencia es la utilizada en aquellos procesos en los que se desea aplicar el método de jerarquía de Saaty [54,55,56]. En este caso el elemento ij-ésimo representa el número de veces que la alternativa x_i es mejor que la alternativa x_j para el experto que proporcionó dicha relación de preferencia . Es habitual tomar como rango para los elementos de la matriz A el intervalo cerrado $[1/9, 9]$, aunque cualquier intervalo cerrado no conteniendo el valor 0 es apropiado en estos casos, puesto que dicho valor sólo surgiría en el caso de existir una alternativa valorada con una importancia 0, y por tanto prescindible.

3. Proceso de Resolución del Problema de TDME

Como hemos mencionado anteriormente, el proceso de resolución del problema de TDME consiste en la obtención de un conjunto solución de alternativas, $X_{sol} \subset X$, a partir de las preferencias proporcionadas por los expertos. El proceso de resolución se desarrolla generalmente aplicando dos procesos: (i) el proceso de selección, y (ii) el proceso de consenso.

3.1. Proceso de Selección

Por proceso de selección se entiende el proceso mediante el cual se obtiene el conjunto de alternativa(s) solución a partir de las preferencias individuales, sobre el conjunto de alternativas, de cada uno de los expertos implicados en el proceso de toma de decisión. Para conseguir este objetivo, se ha de tener claro el criterio global (o de conjunto) a aplicar en la elección de la alternativas que formarán parte del conjunto solución. Este criterio global suele reducirse a una comparación de las alternativas entre sí para lo que normalmente se suele utilizar una función, llamada de selección, para asociar a cada alternativa un valor, llamado grado de selección, que se utilizará obviamente para producir un orden parcial de las alternativas [19,23,25,31,50,60].

Los procesos de selección clásicos de TDME a su vez se aplican generalmente en dos fases [23]: (a) agregación y (b) explotación

3.1.1. Agregación

Entendemos por agregación la operación consistente en transformar un conjunto de elementos (conjuntos difusos, opiniones individuales sobre un conjunto de alternativas expresadas cardinalmente o lingüísticamente, ...) en un único elemento representativo del mismo [20,21,63]. En los problemas de TDME la agregación se realiza sobre las preferencias individuales que los expertos proporcionan sobre el conjunto de alternativas, de forma que la información obtenida tras el proceso de agregación, llamada preferencia global o de conjunto, sea resumen y reflejo de las propiedades contenidas en ellas. El problema de la agregación de información ha sido ampliamente estudiado, existiendo una gran cantidad de publicaciones al respecto, entre los que cabe citar [20,21,32,63].

Las preferencias sobre un conjunto de alternativas expresadas de forma numérica pueden considerarse como conjuntos difusos del conjunto de alternativas, por lo que el problema de agregación de preferencias se ha estudiado desde la perspectiva de la agregación de conjunto difusos, estudio que se convirtió en un tema de gran importancia desde las primeras publicaciones sobre conjuntos difusos debidas a Zadeh [68] y Goguen [24,25].

Una de las aproximaciones más directas para agregar preferencias es la utilización de procedimientos de agregación utilizados con frecuencia en la teoría de utilidad. Según Bonissone y Decker [7], existen tres clases básicas de operaciones de agregación: conjuntivas, disyuntivas y promedios. Las dos primeras formas de agregación se estudian utilizando t-normas y t-conormas, mientras que la tercera se hace con los llamados operadores de promedio. Estos operadores no cuentan con unos homólogos en la teoría clásica de conjuntos, y se localizan entre el operador mínimo y el operador máximo. Estos límites tienen una explicación muy intuitiva, ya que si se permiten compensaciones en presencia de criterios conflictivos, el promedio resultante debería situarse entre la cota inferior más optimista y la cota superior más pesimista, es decir, entre la mejor y la peor estimación local [73].

Operadores tales como la media aritmética, media geométrica, ponderadas y no ponderadas, son ejemplos de operadores de agregación no paramétricos. Dentro de los operadores de agregación paramétricos destacan el operador “y compensatorio” de Zimmermann y Zysno [74], cuyo parámetro indica la localización entre el “y” lógico y el "o" lógico. Otro de los operadores que siguen en la línea de compensación paramétrica son los obtenidos como combinaciones lineales convexas de cada una de las funciones de pertenencia de cada uno de los conjuntos difusos a agregar. Estos operadores, llamados operadores OWA fueron propuestos por Yager en [63] y más recientemente fueron caracterizados en [65], y constituyen una transición continua entre el operador mínimo y máximo. El problema añadido con este tipo de operadores es el del cálculo de los parámetros de la citada combinación lineal convexa, así como el de establecer un orden entre ellos. Yager soluciona el segundo de los problemas asociando no un agregado a un parámetro, sino al contrario, asociando un parámetro con un agregado, los cuales previamente han debido ser ordenados de mayor a menor. En Yager [63,65] y Zadeh [70] se proporcionan procedimientos para el cálculo de los parámetros de estos operadores, dando de esta forma posibles soluciones al primero de los problemas mencionados. Uno de los procedimientos es aquel que hace uso de un cuantificador lingüístico para el cálculo de los parámetros [64,66,70]. Un operador OWA se define como sigue [63]:

Definición: Un operador OWA de dimensión n es una función ϕ,

$$\phi \;:[0,1]^n \rightarrow [0,1]$$

que tiene asociado un conjunto de pesos. Así, sea $\{a_1,\ldots,a_n\}$ una conjunto de valores que deseamos agregar, entonces el operador OWA ϕ se define como

$$\phi(a_1,\ldots,a_n) = W \cdot B^T = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot b_i$$

donde $W = \{w_1,\ldots,w_n\}$ es un vector de pesos verificando $w_i \in [0,1]$ y $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$; y B es el vector de valores ordenados, siendo $b_i \in B$ el i-ésimo mayor valor del conjunto $\{a_1,\ldots,a_n\}$.

Se puede verificar de forma inmediata que los operadores OWA son conmutativos, crecientes e idempotentes, pero en general no son asociativos. Por otro lado, como hemos dicho, una cuestión natural en la definición del operador OWA es cómo obtener el vector de pesos asociados. En [65], Yager propuso dos formas distintas de obtenerlo. El primero consiste en la utilización de un mecanismo de aprendizaje de los parámetros por medio de algunos datos muestrales; mientras que el segundo método consiste en proporcionar a los pesos algún tipo de sentido semántico. Este último caso ha permitido múltiples aplicaciones en áreas tales como lógica difusa y lógica multivaluada, teoría de la evidencia, diseño de controladores difusos, así como en agregación de información guiada por un cuantificador.

3.1.2. Explotación

Entendemos por explotación al proceso que se utilizará para transformar la información global sobre las alternativas en una ordenación global de las mismas. El procedimiento que habitualmente se utiliza en este caso es el de utilizar un método de comparación de alternativas basado en algún tipo de grado de selección de alternativas obtenido a partir de la información conjunta.

Un grado de selección de alternativas es una propiedad que caracteriza a una alternativa (bien respecto a las opiniones de un individuo o de un grupo) y permite establecer una clasificación dentro del conjunto total de alternativas. Las alternativas que cumplen esa propiedad con mayor intensidad son las que constituyen el conjunto de alternativas solución. En nuestra memoria, las alternativas se clasificarán sobre la base de dos propiedades:

- *Propiedad de dominancia.* Indica el *grado de dominancia* de una alternativa sobre todas las demás.

- *Propiedad de no-dominancia.* Indica el *grado de no-dominancia* del resto de alternativas sobre una dada.

3.2. Proceso de Consenso

Como ya hemos mencionado, en los problemas de TDME uno de los dos procesos a desarrollar antes de obtener una solución es el proceso de consenso, el cual trataremos de introducir en la presente sección. El proceso de consenso hace referencia a cómo alcanzar el mayor grado de acuerdo o coincidencia entre los individuos sobre el conjunto solución de alternativas.

Normalmente, al inicio de todo problema de TDME las opiniones de los expertos suelen diferir sustancialmente, en cuyo caso es necesario desarrollar un proceso de consenso en un intento de obtener una solución al problema sobre la que dicho conjunto de expertos muestren cierto grado de aceptación. Clásicamente, consenso se define como acuerdo unánime y total de todos los expertos sobre todas las posibles alternativas. Sin embargo, esta definición de consenso es inconveniente para nuestros propósitos por dos razones fundamentalmente:

1. En primer lugar, nos permite diferenciar tan sólo entre dos posibles estados, la existencia y la ausencia de consenso.

2. En segundo lugar, las posibilidades de alcanzar tal acuerdo total, en caso de ser necesario, son prácticamente nulas. Es más, un acuerdo completo y unánime no es esencialmente necesario, incluso a veces es preferible evitarlo en la vida real.

Todo esto ha conducido a la definición y uso de un nuevo concepto de grado de consenso, el cual ha sido llamado grado de consenso suave (soft) [31,33]. Por todo esto, lo que todos los procesos de consenso intentan es alcanzar el máximo grado de consenso posible entre los individuos, aunque éste no sea ideal. En este sentido, un proceso de consenso se entiende como un proceso dinámico e iterativo, coordinado por un moderador, el cual ayuda a los individuos a acercar sus posiciones. Asumimos pues que la sesión con los expertos consta de dos fases [71]: *i) la expresión de opiniones* y *ii) discusión en grupo.*

En cada paso del proceso de consenso, el moderador, una vez las opiniones de los expertos han sido expresadas, conoce el estado de consenso existente entre los individuos, a través de una medida de consenso, que establece la distancia al estado ideal de consenso. Si considera que el nivel de consenso no es aceptable, es decir, si aún existe mucha discrepancia entre los individuos, lo cual puede implicar un rechazo por parte de éstos de la solución final del problema de TDME, urgirá a los mismos a discutir con profundidad sus opiniones en un intento de acercar posiciones y de esta forma aumentar el acuerdo y en consecuencia el consenso entre ellos. Por el contrario, cuando el nivel de consenso es satisfactorio, el moderador aplicará el proceso de selección descrito para obtener la solución final de consenso del problema de TDME.

4. Concepto de Mayoría en Problemas de TDME

Como ya dijimos en la introducción de este Capítulo, uno de los elementos subyacentes en la toma de decisión en grupo es el concepto de mayoría, pues una solución ha de contener la(s) opción(es) mejor(es) aceptada(s) por el grupo, en el sentido de que la mayoría de sus miembros han de aceptar tal solución, ya que en ninguna situación real, salvo en las obvias, la solución es aceptada por todos los expertos. En este sentido, algunos de los problemas en la toma de decisiones en grupo están claramente relacionados con la concepción demasiado rígida del concepto de mayoría. Una línea de razonamiento que puede adoptarse para resolver dichos problemas es la de adoptar una concepción de mayoría más flexible y cercana a la que de ella tienen las personas, la cual suele ser vaga, en el sentido de no ser la misma para distintas situaciones. Así, puede que en alguna situación quedemos satisfechos con que la mitad de los expertos coincidan en la solución, mientras que en otros casos puede que dicho valor sea insuficiente y necesitemos al menos el acuerdo de un 80% de los expertos, etc. Se podría decir que la acomodación de una mayoría menos rígida o flexible ayudaría a conseguir modelos de toma de decisiones en grupo más consistentes con la forma de actuación humana.

Es fácil ver que las manifestaciones más naturales de tal mayoría flexible son los llamados cuantificadores lingüísticos difusos como por ejemplo “bastantes”, “casi todos”, “muchos más que la mitad”, etc. , los cuales no pueden manejarse por métodos formales convencionales, pues en éstos suelen considerarse tan sólo dos cuantificadores, que son “al menos uno” y “todos”. Afortunadamente, en años recientes han sido propuestos cálculos de proposiciones cuantificadas lingüísticamente basados en lógica difusa [64,66,70]. Estos cálculos han sido aplicados por Kacprzyk y otros [26,27,28,34] para introducir una mayoría difusa, representada por un cuantificador lingüístico difuso, tanto en los modelos de toma de decisiones en grupo como en la implementación de sistemas soporte para la obtención de consenso.

Los cuantificadores pueden utilizarse para representar la cantidad de elementos que satisfacen una determinada propiedad. La lógica clásica se restringe al uso tan sólo de dos cuantificadores, “al menos uno” y “todos”, los cuales están relacionados con las conjunciones lógicas “o” e “y” respectivamente. Sin embargo, los cuantificadores que habitualmente se utilizan en el quehacer diario son muchos más, como por ejemplo, *aproximadamente 5, casi todos, unos pocos, muchos, la mayor parte de, casi la mitad, al menos la mitad*, etc. En un intento de proporcionar una representación de tales cuantificadores, Zadeh introdujo el concepto de cuantificador lingüístico difuso [70], el cual fue definido como un conjunto difuso. Él distinguió entre dos tipos de cuantificadores lingüístico, *absolutos* y *proporcionales* o *relativos.* Los primeros se utilizan para representar cantidades que son absolutas en naturaleza tales como por ejemplo *aproximadamente 5, más de 5* o *menos de 5*. Estos cuantificadores lingüísticos absolutos están relacionados con el concepto de número de elementos. Zadeh definió estos cuantificadores como subconjuntos difusos, Q, del conjunto de números reales no negativos, R^+, de forma que para $r \in R^+$ el grado de pertenencia de r en Q, $Q(r)$ indica el grado con el que la cantidad r es compatible con el cuantificador representado por Q. Los cuantificadores proporcionales, como por ejemplo *al menos la mitad* o *la mayor parte,* pueden representarse mediante subconjuntos difusos del intervalo $[0,1]$. Para $r \in [0,1]$, $Q(r)$ indica el grado con el que la proporción r es compatible con el significado del cuantificador que representa. Cualquier cuantificador del lenguaje natural puede ser representado como un cuantificador proporcional o, supuesto conocida la cantidad de elementos en consideración, como un cuantificador absoluto. Funcionalmente, un cuantificador lingüístico puede ser de tres tipos, *creciente*, *decreciente* o *unimodal.*

Un cuantificador creciente viene caracterizado por la relación

$$Q(r_1) \geq Q(r_2) \qquad si \qquad r_1 > r_2 .$$

Ejemplos de este tipo de cuantificador son *la mayor parte de, al menos la mitad, la mayor cantidad posible*.

Un cuantificador decreciente está caracterizado por la relación

$$Q(r_1) \leq Q(r_2) \qquad si \qquad r_1 > r_2 .$$

Ejemplos de este tipo de cuantificador son *unos pocos*, *como mucho k.*

Los cuantificadores unimodales tienen la propiedad

$$Q(a) \leq Q(b) \leq Q(c) = 1 \geq Q(d)$$

para algunos $a \leq b \leq c \leq d$. Estos cuantificadores son útiles para representar términos como *aproximadamente q.*

Un cuantificador absoluto, $Q\colon R^+ \rightarrow [0,1]$, verifica

$$Q(0) = 0 \quad \wedge \quad \exists k \quad tal \quad que \quad Q(k) = 1,$$

mientras que un cuantificador relativo, $Q\colon [0,1] \rightarrow [0,1]$, satisface la propiedad

$$Q(0) = 0 \quad \wedge \quad \exists r \in [0,1] \quad tal \quad que \quad Q(r) = 1.$$

La función de pertenencia de un cuantificador relativo creciente puede representarse como sigue:

$$Q(r) = \begin{cases} 0 & si \quad r < a \\ \dfrac{r-a}{b-a} & si \quad a \leq r \leq b \\ 1 & si \quad r > b \end{cases}$$

con $a, b, r \in [0,1]$. Algunos ejemplos de cuantificadores relativos crecientes se muestran en la figura 2 donde los parámetros (a,b) son $(0,0.5)$, $(0.5,1)$ y $(0.3,0.8)$ respectiva mente.

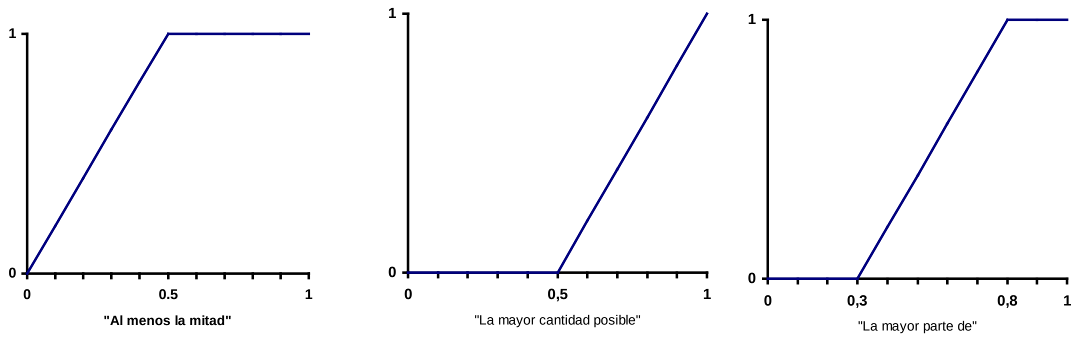

Figura 2. Cuantificadores lingüísticos difusos relativos

Yager en [66] describió un formalismo para evaluar la verdad de proposiciones cuantificadas lingüísticamente, el cual se basaba en una interpretación lógica que utiliza una generalización de las operaciones "*y*" y "*o*" vía los operadores OWA, incorporando de esta forma el concepto de mayoría difusa. Nosotros en esta memoria introduciremos el concepto de mayoría difusa en la fase de agregación de la información así como en la fase de explotación, por lo que utilizaremos operadores de agregación de información guiados por un cuantificador, uno de los cuales es el operador OWG propuesto en esta memoria además del mencionado operador OWA, pues nuestra idea es la de calcular los pesos de tales operadores utilizando un cuantificador lingüístico para representar el concepto de mayoría en las operaciones de agregación y explotación que se realicen en nuestro proceso de decisión. Por tanto, en los procesos de agregación y explotación el concepto de mayoría es introducido mediante los pesos del operador utilizado. Como hemos dicho, Yager en [65] sugirió una interesante forma de calcular los pesos del operador de agregación OWA usando un cuantificador lingüístico difuso, que en el caso de un cuantificador proporcional creciente Q, viene dado por la ecuación:

$$w_i = Q\left(i/n\right) - Q\left(i-1/n\right), \quad i = 1,\ldots,n .$$

Cuando para calcular los pesos del operador OWA ϕ se utiliza un cuantificador lingüístico difuso Q, entonces dicho operador se simboliza por ϕ_Q.

Capítulo 2

Un Modelo de TDME con Diferentes Estructuras de Preferencia Basado en Relaciones de Preferencia Difusas

En este Capítulo estudiamos el problema de TDME en el que la información sobre las alternativas proporcionada por los expertos puede venir representada mediante un *orden de preferencia de alternativas*, a través de una *función de utilidad* o como una *relación de preferencia difusa*. Nuestro objetivo es establecer un modelo de TDME general de manera que cubra estas tres posibles representaciones de la información. En primer lugar presentamos el proceso de resolución que aplicaremos a estos problemas de TDME con diferentes estructuras de representación de información. La primera cuestión que debemos afrontar en este tipo de problemas es la de uniformizar la información, para lo que usaremos las relaciones de preferencia difusas como el elemento base de dicha representación uniforme de las preferencias. En segundo lugar, diseñamos procesos de selección genéricos en TDME (i) basados en el concepto de mayoría difusa, el cual es utilizado para representar el concepto de opinión social, y (ii) usando el operador OWA, como operador de agregación. Con este operador definimos dos grados de selección de alternativas, uno de los cuales generaliza el concepto de alternativa no dominada de Orlovski. Por último, analizamos la consistencia del modelo para probar que actúa coherentemente. De hecho mostraremos que las funciones de transformación necesarias para uniformizar la información preservan el orden final de las alternativas establecidas por las diferentes estructuras de representación de preferencias.

1. Proceso de Resolución del Problema de TDME con Diferentes Estructuras de Preferencia

La mayoría de los modelos de decisión para problemas de TDME propuestos hasta la fecha adoptan representaciones homogéneas de la información, es decir asumen que los expertos presentan sus preferencias utilizando una misma estructura de representación de la información. Así, podemos citar problemas de TDME en los que la información es presentada en forma de órdenes de preferencia [3,46,48,57,58], o mediante funciones (valores) de utilidad [19,43,46,57,60], o a través de relaciones de preferencia [30,35,47,50,54,59,60]. Sin embargo, esta no es una suposición realista puesto que podemos encontrarnos situaciones de toma de decisión en las que los expertos no son capaces de expresar sus opiniones usando la misma estructura de representación que los demás o bien prefieren usar una estructura alternativa. Es por ello que nosotros suponemos que las preferencias de un experto sobre el conjunto de alternativas pueden venir representada como un orden de preferencia de alternativas, como una función de utilidad o como una relación de preferencia difusa. Esta situación de heterogeneidad en la representación de la información plantea obviamente como primera etapa de nuestro proceso de resolución el estudio de la relación existente entre las distintas estructuras de representación de información, para de esta forma poder obtener una representación homogénea que cubra las tres estructuras de representación de preferencias. Una vez obtenida dicha uniformidad de la información, a partir de ella se puede desarrollar uno cualesquiera de los procesos de selección [26,30,55,60]. En este sentido, el proceso de resolución, del problema de TDME considerado, que proponemos presenta el esquema dado en la figura 3.

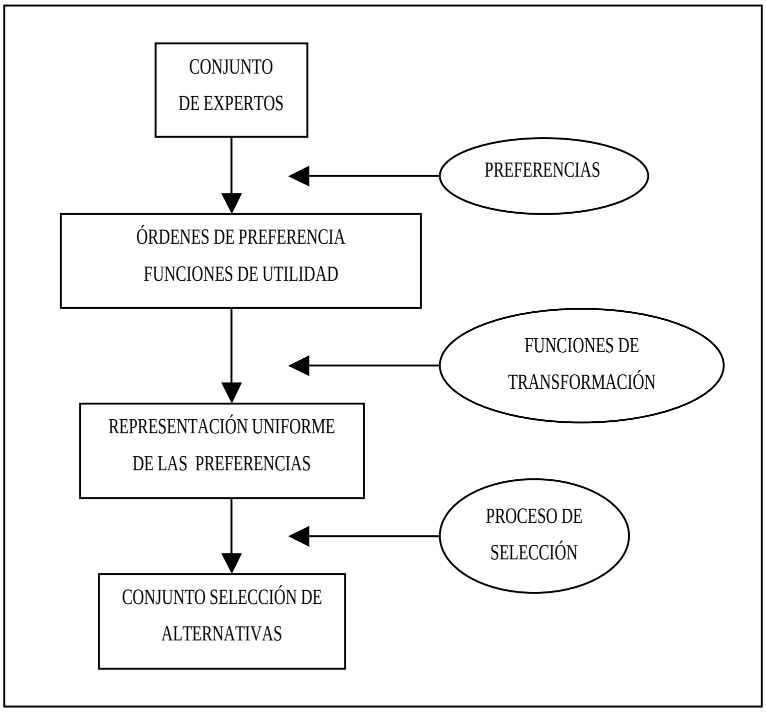

Figura 3. Esquema del Proceso de Resolución del problema de TDME.

1. *Representación uniforme de la información.* La información heterogénea del problema se transforma, mediante la aplicación de diversas funciones de transformación, en información homogénea, que serán presentadas en la sección 2. Dichas funciones de transformación constituyen una generalización de las utilizadas en distintos métodos [19,43,59,60].

2. *Aplicación de un proceso de selección.* Como hemos dicho anteriormente, el proceso de selección lo aplicamos en dos etapas [23]:

2.1. Fase de agregación. Haciendo uso del concepto de mayoría difusa (de expertos) representada por un cuantificador lingüístico y aplicándolo en las operaciones de agregación por medio de un operador OWA [63], a partir del conjunto de estructuras homogéneas de preferencias individuales se obtiene una estructura de preferencia colectiva.

2.2. Fase de explotación. Utilizando de nuevo el concepto de mayoría difusa (de alternativas) definiremos dos grados de selección de alternativas: el grado de dominancia guiado por un cuantificador, y el grado de no-dominancia guiado por un cuantificador, siendo este último una generalización del concepto de no-dominancia de Orlovski [50]. Estos grados de selección actúan sobre la estructura de preferencia colectiva, proporcionando un conjunto selección de alternativas.

En la siguiente sección estudiamos el problema de la representación uniforme de la información y analizamos las diversas funciones de transformación necesarias para alcanzar dicha representación uniforme.

2. Representación Uniforme de la Información Basada en Relaciones de Preferencia Difusas

En este marco general, donde la información proporcionada por un conjunto de expertos se supone de naturaleza diversa, la primera tarea a realizar consiste en uniformar dicha información, para lo cual se hace necesario estudiar las distintas relaciones existentes entre las estructuras de representación de preferencias. De las tres estructuras de representación de preferencia anteriores, las relaciones de preferencia difusas constituyen la estructura más usada y estudiada en la literatura tanto para modelar las opiniones de los expertos sobre un conjunto de alternativas en los problemas de toma de decisión [23,31,32,34,39,49,50,59,60], como sobre todo para agregar las preferencias de éstos, es decir, en el proceso de resolución de los problemas de TDME [5,6,26,27,30,35,51,58,59,60]. Además, tanto los órdenes de preferencia como los valores de utilidad están incluidos en la familia de relaciones de preferencia difusas [58,59,60]. Por otro lado, hay numerosos resultados en problemas de TDME que se han obtenido haciendo uso de relaciones de preferencia difusas, por lo que utilizando las relaciones de preferencia difusas como el elemento base para la uniformidad de las preferencias conseguiremos una generalización de los mismos.

Por tanto, como muestra la figura 3, necesitamos un mecanismo para unificar las tres estructuras de representación de preferencias. En las siguientes subsecciones analizamos este aspecto y presentamos funciones generales para transformar en relaciones de preferencia difusas tanto los órdenes de preferencia como los valores de utilidad.

2.1. Valores de Utilidad y Relaciones de Preferencia Difusas

En esta sección estudiamos la relación entre valores de utilidad y relaciones de preferencia difusas. Suponemos que sobre un conjunto de alternativas, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}, \ (n \geq 2)$, la información proporcionada por un experto e_k viene expresada en forma de conjunto de n valores de utilidad, $U^k = \{u_1^k, \ldots, u_n^k\}; u_i^k \in [0,1]$, es decir, cada alternativa x_i tiene asociado un número real u_i^k, que sin pérdida de generalidad se supone pertenece al intervalo cerrado $[0,1]$, el cual indica el grado de cumplimiento por parte de dicha alternativa del objetivo global del experto e_k. Para cada conjunto de valores de utilidad, supondremos, sin perdida de generalidad, que cuanto mayor es la valuación de una alternativa mejor satisface dicha alternativa el objetivo del experto.

Nuestra meta es la obtención de una relación de preferencia difusa sobre la base de este conjunto de valores de utilidad, es decir, el cálculo de p_{ij}^k, o grado de preferencia de la alternativa x_i sobre la alternativa x_j para el experto e_k, en base, naturalmente, a los valores de utilidad asociados a ambas alternativas, $u_i^k, u_j^k\ \forall i, j$. En general, el valor p_{ij}^k debe obtenerse a partir de la comparación entre sí de los valores u_i^k y u_j^k. Según la regla del tercio excluso, una y sólo una de las tres siguientes condiciones se cumple:

$$a)\ u_i^k < u_j^k\ ;\ b)\ u_i^k = u_j^k\ ;\ c)\ u_i^k > u_j^k\,.$$

En el primer caso la alternativa x_j es preferida a la alternativa x_i, en el segundo estamos ante un caso de indiferencia, mientras que en el tercer caso la alternativa x_i es preferida a la alternativa x_j. En general, para obtener la intensidad o grado de preferencia de una alternativa sobre otra hay que cuantificar cuánto una alternativa es mejor que otra. Dos son las formas habituales de cuantificar dicha cantidad: mediante el valor de la diferencia o mediante el valor del cociente o razón de los valores asociados a ellas, es decir como función de $u_i^k - u_j^k$ o de $\frac{u_i^k}{u_j^k}$. En esta sección nos centraremos en la obtención de la relación existente entre valores de utilidad y relaciones de preferencia difusas, utilizando para ello el valor del cociente de los valores de utilidad, en cuyo caso se dicen dados basándose en una escala de razón.

2.1.1. Proceso de Obtención de la Función de Transformación de Valores de Utilidad en Relación de Preferencia Difusa

Para cada conjunto de valores de utilidad, $U_k = \left(u_1^k, \ldots, u_n^k\right)$, sobre el conjunto de alternativas, tenemos que obtener una relación de preferencia $P_k = \left[p_{ij}^k\right]$. Como hemos dicho anteriormente, la intensidad de preferencia (para abreviar la preferencia) de la alternativa x_i sobre la alternativa x_j para el experto e_k, depende solamente de los valores u_i^k y u_j^k [23], es decir:

$$p_{ij}^k = h\left(u_i^k, u_j^k\right),$$

donde h es una función de transformación creciente en el primer argumento y decreciente en el segundo argumento.

Un ejemplo de este tipo de funciones de transformación, definidas a partir de un conjunto de valores de utilidad sobre la base de una escala de razón, son aquellas que obtienen el valor de credibilidad de preferencia de una alternativa sobre otra basándose tan sólo en el valor del cociente de los respectivos valores de utilidad de las alternativas, es decir, las funciones del tipo

$$h\left(u_i^k, u_j^k\right) = l\left(\frac{u_i^k}{u_j^k}\right),$$

donde l es una función creciente. Este tipo de funciones de transformación ha sido investigado por Luce y Suppes [43].

Interpretando $\frac{u_i^k}{u_j^k}$ como una razón de la intensidad de preferencia de x_i sobre x_j, es decir, x_i es $\frac{u_i^k}{u_j^k}$ veces mejor que x_j, y asumiendo que la relación de preferencia es recíproca, es decir, $p_{ij}^k + p_{ji}^k = 1$, una posible función de transformación para obtener la intensidad de preferencia de x_i sobre x_j para el experto e_k, p_{ij}^k, puede ser la definida como sigue:

$$p_{ij}^k = l^1\left(\frac{u_i^k}{u_j^k}\right) = \frac{\dfrac{u_i^k}{u_j^k}}{\dfrac{u_i^k}{u_j^k} + \dfrac{u_j^k}{u_i^k}} = \frac{\left(u_i^k\right)^2}{\left(u_i^k\right)^2 + \left(u_j^k\right)^2}.$$

Otros ejemplos de este tipo de funciones pueden encontrarse en [58,59,60], como el siguiente:

$$p_{ij}^k = l^2\left(\frac{u_i^k}{u_j^k}\right) = \frac{u_i^k}{u_i^k + u_j^k}.$$

Obviamente, estas no son las únicas funciones que podemos utilizar para transformar valores de utilidad, dados sobre la base de una escala de razón, en relaciones de preferencia. Como veremos más adelante, ambas funciones son casos particulares de una familia general de funciones de transformación.

Sin pérdida de generalidad, supondremos que los valores de utilidad pertenecen al intervalo cerrado $[0,1]$. Entonces, la función de transformación que buscamos

$$h:[0,1]\times[0,1]\to[0,1],$$

tiene que verificar las siguientes propiedades:

1. $h(z,y)+h(y,z)=1 \qquad \forall z,y\in[0,1].$
2. $h(z,z)=1/2 \qquad \forall z,\in[0,1].$
3. $h(z,0)=1 \qquad \forall z\in\,]0,1].$
4. $h(z,y)>1/2 \;\Leftrightarrow\; z>y \qquad \forall\, z,y\in[0,1].$

- La propiedad 1 es la condición de reciprocidad aditiva.
- La propiedad 2 es una consecuencia de la propiedad 1, e indica la indiferencia de un experto entre dos alternativas verificando su criterio con igual intensidad.

- La propiedad 3 significa que si un experto sabe con certeza o considera que una alternativa no satisface su criterio, entonces cualquier otra alternativa que satisfaga su criterio con grado positivo debería ser preferida con el máximo valor de preferencia.
- Finalmente, la propiedad 4 indica que entre dos alternativas, el experto prefiere a la alternativa con un mayor grado de valuación. Esta propiedad es consecuencia de la propiedad 2 y del hecho que la función, h, tiene que ser creciente en el primer argumento y decreciente en el segundo argumento.

Sin pérdida de generalidad, asumimos que

$$h(z,y) = \frac{1}{1+t(z,y)} ,$$

donde

$$t:[0,1]\times[0,1] \to R^{+},$$

es una función creciente en el primer argumento y decreciente en el segundo argumento. Para resolver la anterior ecuación asumimos que t es una función separable, es decir, una función que puede expresarse de la forma siguiente

$$t(z,x) = r(z)\cdot s(y) .$$

Entonces tenemos

$$h(z,y) = \frac{1}{1+r(z)\cdot s(y)} ,$$

donde r, s son funciones con igual dominio $[0,1]$, mismo signo, decreciente la primera y creciente la segunda, respectivamente. Aplicando la propiedad 2 tenemos

$$r(z)\cdot s(z) = 1 \qquad \forall x \in [0,1].$$

Por tanto, $r \equiv \frac{1}{s}$, y en consecuencia la expresión de la función h adopta la siguiente forma:

$$h(z,y) = \frac{s(z)}{s(z)+s(y)}.$$

De la propiedad 3 tenemos que $s(0)=0$, de forma que

$$s:[0,1] \to R^{+}.$$

Esto último significa que la expresión de h carece de significado cuando $(z,y)=(0,0)$. En este caso, aplicando la propiedad 2 podemos definir

$$h(0,0) = \frac{1}{2}.$$

Una propiedad deseable de ser verificada por la relación de preferencia difusa definida es que si las valuaciones $\left(u_i^k, u_j^k\right)$ de un par de alternativas $\left(x_i, x_j\right)$ cambian ligeramente, entonces el grado de preferencia entre ambas p_{ij}^k debería cambiar igualmente de forma ligera, es decir, sería deseable que la función h fuese una función continua. Esto se obtiene exigiéndole a la función s que sea continua.

Para justificar la suposición de separación de variables anterior, consideremos lo siguiente. Deseábamos encontrar funciones

$$h:[0,1]\times[0,1]\to[0,1],$$

verificando

$$h(z,y)+h(y,z)=1 \quad \forall z,y \in [0,1],$$

sin pérdida de generalidad, podemos asumir que

$$h(z,y) = [t'(z,y)]^2 \quad \forall z,y \in [0,1],$$

siendo $t'(z,y) \in [0,1]$. Entonces, tenemos

$$[t'(z,y)]^2 + [t'(y,z)]^2 = 1 \ \forall z, y \in [0,1].$$

La anterior ecuación puede representarse en su forma paramétrica equivalente

$$t'(z,y) = \cos\gamma \qquad t'(y,z) = \operatorname{sen}\gamma \ ,$$

donde $\gamma \in [0, \pi/2]$ representa el valor del ángulo de un vector de coordenadas cartesianas (z,y) o, en general, $(q(z), q(y))$, donde

$$q : [0,1] \rightarrow R^+ ,$$

es una función creciente y continua, verificando $q(0) = 0$. De aquí obtenemos que

$$\gamma = \arccos \frac{q(z)}{\sqrt{[q(z)]^2 + [q(y)]^2}} ,$$

y, por tanto

$$t'(z,y) = \frac{q(z)}{\sqrt{[q(z)]^2 + [q(y)]^2}} .$$

Finalmente, notando $s(z) = [q(z)]^2$, la expresión de la función h sería

$$h(z,y) = \frac{s(z)}{s(z) + s(y)} ,$$

la cual coincide con la que obtuvimos bajo la suposición de separación de variables. Resumiendo, tenemos la siguiente proposición:

Proposición 1. Para cada conjunto de valores de utilidad, $U^k = \left(u_1^k, \ldots, u_n^k\right)$, sobre un conjunto de alternativas, $X = \left\{x_1, \ldots, x_n\right\}$, dados basándose en una escala positiva de razón, entonces la preferencia de la alternativa x_i sobre x_j, p_{ij}^k, viene dada por la función de transformación siguiente

$$p_{ij}^k = \begin{cases} \dfrac{s(u_i^k)}{s(u_i^k) + s(u_j^k)} & si \quad (u_i^k, u_j^k) \neq (0,0) \\ \dfrac{1}{2} & si \quad (u_i^k, u_j^k) = (0,0) \end{cases}$$

donde $s: [0,1] \rightarrow R^+$ es una función creciente y continua, verificando $s(0) = 0$.

Corolario 1.1. Cuando $s(u) = u$ la función de transformación, h, se reduce a la función de transformación, l^2, propuesta en [58,59,60]. Por otro lado, cuando $s(u) = u^2$, entonces obtenemos la función de transformación l^1.

Ejemplo: Supongamos un conjunto de cuatro alternativas $X = \left\{x_1, x_2, x_3, x_4\right\}$ sobre el que un experto proporciona sus opiniones a través del siguiente conjunto de valores de utilidad $U = \left\{0.5, 0.7, 1, 0.1\right\}$. Entonces, aplicando la función de transformación l^1, la correspondiente relación de preferencia difusa es :

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & \frac{25}{74} & 0.2 & \frac{25}{26} \\ \frac{49}{74} & 0.5 & \frac{49}{149} & 0.98 \\ 0.8 & \frac{100}{149} & 0.5 & \frac{100}{101} \\ \frac{1}{26} & 0.02 & \frac{1}{101} & 0.5 \end{bmatrix}.$$

La relación entre valores de utilidad y relaciones de preferencia difusas utilizando para ello el valor de la diferencia de los valores de utilidad se tratará en el siguiente apartado.

2.2. Órdenes de Preferencia y Relaciones de Preferencia Difusas

En este caso, asumimos que un experto, e_k, proporciona sus preferencias sobre X en forma de orden de preferencia, $O_k = \{o^k(1),\ldots,o^k(n)\}$. Para todo orden de preferencia, O_k, supondremos, sin pérdida de generalidad, que cuanto menor es la posición de una alternativa en dicho orden mejor satisface dicha alternativa el criterio del experto que proporciona dicho orden, y viceversa. Por ejemplo, supongamos que un experto proporciona sus preferencias sobre un conjunto de cuatro alternativas, $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, mediante el siguiente orden de preferencia (x_2, x_4, x_1, x_3). En este caso $o(1) = 3,\ o(2) = 1,\ o(3) = 4,\ o(4) = 2$. Esto significa que la alternativa x_2 es la mejor para dicho experto, mientras que la alternativa x_3 es la peor. Nuestro objetivo consiste en la obtención de una relación de preferencia difusa a partir de un orden de preferencia.

2.2.1. Proceso de Obtención de la Función de Transformación de Órdenes de Preferencia en Relaciones de Preferencia Difusas

Como hemos mencionado más arriba, una alternativa satisface el criterio de un experto con mayor o menor intensidad dependiendo de la posición que dicha alternativa ocupe en su orden de preferencia. Puesto que el valor de preferencia p_{ij}^k debe reflejar la intensidad o grado con el cual la alternativa x_i es preferida a la alternativa x_j para el experto e_k, entonces es obvio que dicha preferencia dependerá tan sólo de los valores $o^k(i)$ y $o^k(j)$ [23], es decir, afirmamos que existe una función de transformación, f, de órdenes de preferencia en relaciones de preferencia difusas

$$p_{ij}^k = f\left(o^k(i), o^k(j)\right).$$

Esta función de transformación debe ser decreciente en el primer argumento y creciente en el segundo argumento.

Un ejemplo de este tipo de funciones de transformación son aquellas que obtienen el valor de credibilidad de preferencia de una alternativa sobre otra sobre la base del valor de la diferencia entre las respectivas posiciones de las alternativas, es decir,

$$p_{ij}^k = f\left(o^k(i), o^k(j)\right) = g\left(o^k(j) - o^k(i)\right),$$

donde g es una función creciente. Por ejemplo, una de tales funciones de transformación es:

$$p_{ij}^k = g^1\left(o^k(j) - o^k(i)\right) = \begin{cases} 1 & si\ \ o^k(j) - o^k(i) > 0 \\ 0 & si\ \ o^k(j) - o^k(i) < 0 \end{cases}.$$

Esta función de transformación proporciona relaciones de preferencia no difusas, donde p_{ij}^k refleja el grado en $\{0,1\}$ con el que la alternativa x_i es considerada no peor que la alternativa x_j para el experto e_k. En nuestro ejemplo, la alternativa x_2 no es peor que las alternativas x_4, x_1, x_3; la alternativa x_4 no es peor que las alternativas x_1, x_3; y, finalmente, la alternativa x_1 no es peor que la alternativa x_3. Por tanto, con la anterior función de transformación obtenemos la siguiente relación de preferencia no difusa:

$$P^K = \begin{pmatrix} - & 0 & 1 & 0 \\ 1 & - & 1 & 1 \\ 0 & 0 & - & 0 \\ 1 & 0 & 1 & - \end{pmatrix}.$$

Las únicas virtudes de este tipo particular de transformación son la simplicidad y la facilidad de uso. Sin embargo, las relaciones de preferencia obtenidas con este tipo de transformación no reflejan el caso en el que un experto no es capaz de distinguir entre dos alternativas, es decir cuando hay una indiferencia entre dos alternativas, aunque esto puede resolverse de forma sencilla mediante una extensión de la anterior función, como sigue:

$$p_{ij}^k = g^2\left(o^k(j) - o^k(i)\right) = \begin{cases} 1 & si \quad o^k(j) - o^k(i) > 0 \\ \frac{1}{2} & si \quad o^k(j) - o^k(i) = 0 \\ 0 & si \quad o^k(j) - o^k(i) < 0 \end{cases}.$$

En cualquier caso, estos dos funciones no reflejan ningún tipo de intensidad de preferencia entre las alternativas, de forma que con ellas la preferencia de la alternativa x_2 sobre la alternativa x_4 y la preferencia de la alternativa x_2 sobre x_3 son iguales. Para tratar estas situaciones se necesita la utilización de otra clase de función que refleje de forma apropiada las diferentes posiciones entre las alternativas, y que generalice a las anteriores. Esto significa que, sin contar con información suplementaria alguna excepto el orden de preferencia, si $p_{24} = \frac{2}{3}$ entonces p_{41} y p_{13} deberían ser iguales a 2/3, mientras que p_{21} debería ser mayor o igual que 2/3 y menor o igual que p_{23}.

Esta otra clase de función puede obtenerse, por ejemplo, asociando un valor de importancia o utilidad a cada alternativa, siguiendo el criterio de a menor posición de una alternativa dentro de un orden de preferencia mayor valor de utilidad. En estas situaciones una suposición normal y lógica es la de asociar un valor de preferencia máximo a la mejor alternativa dentro de un orden de preferencia sobre la peor alternativa en dicho orden, es decir 1. De esta forma si, por ejemplo, $o(i) = 1$ y $o(j) = n$, entonces supondremos que $p_{o(i)o(j)} = 1$. En este caso, el valor de utilidad, u_i^k asociado a la alternativa x_i dependerá tan sólo del valor de su posición dentro del orden, $o^k(i)$, de forma que cuanto mayor sea el valor de $n - o^k(i)$ mayor es el valor de u_i^k, es decir ,

$$u_i^k = v\left(n - o^k(i)\right),$$

siendo v una función creciente. A modo de ejemplo, podemos asignar el siguiente valor

$$u_i^k = v\left(n - o^k(i)\right) = \frac{n - o^k(i)}{n-1},$$

como un grado de importancia o utilidad de la alternativa x_i sobre la base del orden de preferencia, O^k, proporcionado por el experto e_k. Es claro que el máximo valor de utilidad corresponde a la primera alternativa, mientras que el mínimo valor de utilidad corresponde a la última alternativa en el orden de preferencia. En este contexto, tenemos un conjunto normalizado de n valores de utilidad, es decir,

$$\max_i \left\{u_i^k\right\} - \min_i \left\{u_i^k\right\} \leq 1.$$

Tanino propuso en [58,59,60] para este tipo de valores de utilidad, a los cuales consideraba dados en base a una escala de diferencias, una función de transformación que obtiene las preferencias entre alternativas, p_{ij}^k, a partir de la diferencia $u_i^k - u_j^k$, como sigue:

$$p_{ij}^k = g^3\left(u_i^k - u_j^k\right) = \tfrac{1}{2}\left(1 + u_j^k - u_i^k\right).$$

Esta función de transformación ha sido investigada por Dombi [19]. Dombi definió g^3 como la función de preferencias universal y mostró que la toma de decisión basada en utilidades proporciona el mismo resultado que la toma de decisión basada en preferencias utilizando la función universal.

En nuestro caso, la función de transformación, de valores de utilidad (dados en una escala de diferencias) en preferencias, propuesta por Tanino y estudiada por Dombi, aplicada a un orden de preferencia se convierte en

$$p_{ij}^k = g^4\left(o^k(j) - o^k(i)\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{o^k(j)}{n-1} - \frac{o^k(i)}{n-1}\right),$$

y por tanto, el valor de preferencia, p_{ij}^k, depende de la diferencia $o^k(i) - o^k(j)$.

Estas dos funciones de transformación, g^2 y g^4, permiten que los valores de preferencias, p_{ij}^k, verifiquen las siguientes cuatro propiedades:

- $0 \leq p_{ij}^k \leq 1 \quad \forall\, i, j = 1, \ldots, n$.
- $p_{ij}^k + p_{ji}^k = 1 \;\; \forall\, i, j = 1, \ldots, n$.
- Cuando existe indiferencia entre dos alternativas, es decir, cuando $o^k(i) = o^k(j)$, entonces $p_{ij}^k = \frac{1}{2}$.
- $p_{ij}^k > \frac{1}{2} \;\; si \;\; o^k(i) < o^k(j)$.

Obviamente, estas no son las únicas funciones que pueden ser utilizadas para transformar órdenes de preferencia en relaciones de preferencia difusas. Como veremos más adelante, g^2 y g^4, son casos particulares de una familia general de funciones de transformación de órdenes de preferencia en relaciones de preferencia difusas.

En lo que sigue, tanto $o^k(i)$ como $o^k(j)$ pueden ser reemplazados por $u_i^k = v\left(n - o^k(i)\right)$ y $u_j^k = v\left(n - o^k(j)\right)$, respectivamente. Tratamos de encontrar la expresión general de la función de transformación de órdenes de preferencia en relaciones de preferencia difusa, es decir, dado un par de alternativas (x_i, x_j) de las cuales conocemos solamente sus posiciones en un orden de preferencia $\left(o^k(i), o^k(j)\right)$, la preferencia de x_i sobre x_j viene dada por

$$p_{ij}^k = f\left(o^k(i), o^k(j)\right),$$

siendo f una función creciente en el primer argumento y decreciente en el segundo argumento, verificando:

1. $f\left(o^k(i), o^k(j)\right) \in [0,1] \ \ \forall i, j.$.
2. $f\left(o^k(i), o^k(j)\right) + f\left(o^k(j), o^k(i)\right) = 1 \ \ \forall i, j.$.
3. $f\left(o^k(i), o^k(j)\right) = \frac{1}{2} \ \ si \ \ o^k(i) = o^k(j) \ \ \forall i, j.$.
4. $f\left(o^k(i), o^k(j)\right) > \frac{1}{2} \ \ si \ \ o^k(i) < o^k(j) \ \ \forall i, j.$.

Estas propiedades son equivalentes a las anteriores cuatro relaciones verificadas por las funciones de transformación, g^2 y g^4.

Los valores $o^k(i)$ y $o^k(j)$ representan posiciones, por lo que la comparación de dos de ellas sólo tiene sentido hacerlo a través de la operación diferencia, es decir, el valor de preferencia p_{ij}^k dependerá del valor de la diferencia entre las posiciones de las alternativas, es decir,

$$p_{ij}^k = f\left(o^k(i), o^k(j)\right) = g\left(o^k(j) - o^k(i)\right),$$

donde la función g es una función creciente. Más aún, g tiene que verificar

1. $g(z) \in [0,1]$.
2. $g(z) + g(-z) = 1$.
3. $g(z) > ½ \ \ si \ \ z > 0$.

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que

$$g(z) = \tfrac{1}{2} + d(z),$$

siendo d una función creciente verificando

1. $d(z) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.
2. $d(z) + d(-z) = 0$.
3. $d(z) > 0 \quad si \quad z > 0$.

Entonces tenemos:

$$p_{ij}^k = \tfrac{1}{2} + d\left(o^k(j) - o^k(i)\right).$$

La propiedad 2 implica

$$d(-z) = -d(z),$$

es decir, d es una función impar. Por otro lado, es bien conocido el siguiente resultado:

"Una función $d: D \to R$ con dominio simétrico es una función impar si y sólo si existe una función $F: D \to R$ verificando $d(z) = \dfrac{F(z) - F(-z)}{2}$"

Aplicando este resultado a nuestro caso, tenemos la siguiente proposición:

Proposición 2. Supongamos un conjunto de alternativas, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, y asociado con él un orden de preferencia, $O_k = \{o^k(1), \ldots, o^k(n)\}$. Entonces, el grado de preferencia de la alternativa x_i sobre la alternativa x_j viene dada por la siguiente función de transformación, f^1:

$$p_{ij}^k = f^1\left(o^k(i), o^k(j)\right) = \frac{1}{2}\left[1 + F\left(o^k(j) - o^k(i)\right) - F\left(o^k(i) - o^k(j)\right)\right]$$

donde F es una función creciente.

Corolario 2.1. Supongamos que el grado de preferencia de la mejor alternativa sobre la peor alternativa en un orden de preferencia es el máximo permitido (valor 1), entonces:

1. Cuando la función F es la siguiente

$$F(z) = \begin{cases} 1/2 & si \quad z > 0 \\ 0 & si \quad z = 0 \\ -1/2 & si \quad z < 0 \end{cases}$$

entonces la función f^1 se reduce a la función g^2.

2. Cuando la función F es la siguiente

$$F(z) = \frac{a \cdot z}{2}$$

donde $a \in R$, entonces $a = \dfrac{1}{n-1}$ y la función f^1 se reduce a la función g^4.

Como dijimos anteriormente, tanto $o^k(i)$ como $o^k(j)$ pueden ser reemplazados por $u_i^k = v(n - o^k(i))$ y $u_j^k = v(n - o^k(j))$, respectivamente, o en general por dos números reales u_i^k, u_j^k dados sobre la base de una escala de diferencias. En este contexto, se verifica el siguiente resultado:

Proposición 3. Supongamos un conjunto de alternativas, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, y asociado con él un conjunto de valores de utilidad, $U_k = \{u_i^k, \ldots, u_n^k\}$, dados sobre la base de una escala de diferencia. Entonces, el grado de preferencia de la alternativa x_i sobre la alternativa x_j viene dada por la siguiente función de transformación, f^2:

$$p_{ij}^k = f^2\left(u_i^k, u_j^k\right) = \frac{1}{2}\left[1 + F\left(u_i^k - u_j^k\right) - F\left(u_j^k - u_i^k\right)\right]$$

donde F es una función creciente.

Corolario 3.1. La expresión de la función f^2 se reduce a la función de transformación de Tanino, g^3, cuando $F(z) = \frac{z}{2}$.

Corolario 3. 2. Supongamos un orden de preferencia, $O_k = \{o^k(1),\ldots,o^k(n)\}$, asociado a un conjunto de alternativas, $X = \{x_1,\ldots,x_n\}$. Si $u_i^k = v(n - o^k(i)) = a \cdot [n - o^k(i)]$ con $a = \frac{1}{n-1}$ y $F(z) = z$, entonces la función f^2 se reduce a la función de transformación g^4.

Ejemplo: Supongamos un conjunto de cuatro alternativas $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ sobre el que un experto proporciona sus opiniones a través del siguiente orden de preferencia $O = \{3,1,4,2\}$. Entonces, aplicando la función g^4, la correspondiente relación de preferencia difusa es :

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & 0.5 \\ \frac{5}{6} & 0.5 & 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0.5 & \frac{1}{6} \\ 0.5 & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} & 0.5 \end{bmatrix}.$$

3. Un Proceso de Selección para TDME Basado en Relaciones de Preferencia Difusas y Mayoría Difusa

Una vez que la información sobre las alternativas ha sido uniformada, para obtener una solución al problema de TDME tratado en este capítulo se hace necesaria la aplicación de un proceso de selección de alternativas. Como ya dijimos en el primer capítulo, el proceso de selección de un problema de TDME se desarrolla en dos fase. En la primera fase, o fase de agregación, se obtiene una relación de preferencia colectiva difusa a partir del conjunto de relaciones de preferencia difusas individuales, mientras que en la segunda fase, o fase de explotación, se aplican diferentes grados de selección de alternativas con los que poder caracterizarlas y establecer una clasificación entre ellas, permitiéndonos obtener el conjunto solución de alternativas.

3.1. Agregación: Relación de Preferencia Difusa Colectiva

Una vez que la información sobre las alternativas ha sido uniformada usando las funciones obtenidas en la sección 2, dispondremos de un conjunto de m relaciones de preferencia difusas $\{P^1,...,P^m\}$. Como dijimos, para resolver el problema de decisión en función de diferentes fuentes de información, antes de alcanzar una decisión o acción final, se precisa la aplicación de mecanismos adecuados de combinación de información, o lo que es lo mismo, operadores de agregación de información racionales. En esta memoria, puesto que la información que tratamos es de naturaleza numérica, utilizamos operadores promedio ponderados ordenados (operadores OWA), y en concreto en este tipo particular de problema de TDME con información basada en relaciones de preferencia difusas utilizaremos un operador promedio de ponderación ordenado guiado por un cuantificador lingüístico difuso (operador OWA guiado por cuantificador), pues nuestra intención es la de representar el concepto de mayoría difusa en las agregaciones que realicemos. En este tipo de operadores, el concepto de mayoría difusa es introducido mediante el vector de ponderación, que calcularemos utilizando un cuantificador lingüístico que representará el concepto de mayoría que deseemos implementar.

Por tanto, a partir del conjunto de relaciones de preferencia individuales $\{P^1,...,P^m\}$ obtendremos una relación de preferencia difusa colectiva P^c. Cada valor

$p_{ij}^{c} \in [0,1], \forall i, j$, representa la preferencia de la alternativa x_i sobre la alternativa x_j para una mayoría de los expertos, y se obtiene de la siguiente forma:

$$p_{ij}^{c} = \phi_Q \left(p_{ij}^{1}, \ldots, p_{ij}^{m}\right)$$

donde Q es el cuantificador lingüístico que representa el concepto de mayoría difusa que estemos implementando en este momento, y que a su vez es utilizado para calcular los pesos del operador OWA, mediante la expresión:

$$w_k = Q(k/m) - Q((k-1)/m),\ k = 1, \ldots, m$$

Dependiendo del cuantificador lingüístico difuso que usemos, podemos observar las siguientes peculiaridades del operador OWA guiado por cuantificador:

1. Si tomamos el cuantificador *"todos"*, mostrado en la figura 4., cuya función de pertenencia es

$$Q_{-}(r) = \begin{cases} 0 & para \quad r < 1 \\ 1 & para \quad r = 1 \end{cases}$$

entonces obtenemos el siguiente vector de pesos $\mathbf{w} = (0,0,\ldots,0,1)$ y por tanto $p_{ij}^{c} = \phi_{Q_{-}} \left(p_{ij}^{1}, \ldots, p_{ij}^{m}\right) = min\left(p_{ij}^{1}, \ldots, p_{ij}^{m}\right)$.

Figura 4. Cuantificador lingüístico difuso *"todos"*.

2. Si tomamos el cuantificador *"al menos uno"*, mostrado en la figura 5., cuya función de pertenencia es

$$Q^{+}(r) = \begin{cases} 0 & para \quad r = 0 \\ 1 & para \quad r > 0 \end{cases}$$

entonces obtenemos el siguiente vector de pesos $\mathbf{w} = (1,0,...,0,0)$ y por tanto $p_{ij}^{c} = \phi_{Q^{+}}\left(p_{ij}^{1},..., p_{ij}^{m}\right) = max\left(p_{ij}^{1},..., p_{ij}^{m}\right)$.

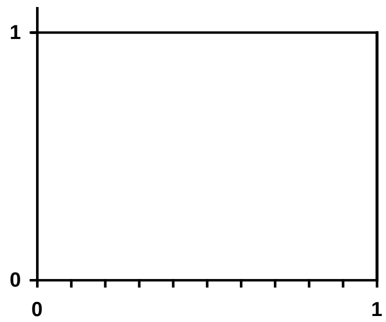

Figura 5. Cuantificador lingüístico difuso *"al menos uno"*.

3. Para cualquier otro cuantificador lingüístico difuso Q se verifica $\phi_{Q_{-}} \leq \phi_{Q} \leq \phi_{Q^{+}}$. Por tanto, los operadores OWA guiados por cuantificadores se localizan entre el operador mínimo y el operador máximo. Estos límites tienen una explicación muy intuitiva, ya que si se permiten compensaciones en presencia de criterios conflictivos, el promedio resultante debería situarse entre la cota inferior más optimista y la cota superior más pesimista, es decir, entre la mejor y la peor estimación local.

3.2. Explotación: Selección de las Alternativas

Un grado de selección de alternativas es una propiedad que caracteriza a una alternativa (bien respecto a las opiniones de un individuo o de un grupo) y permite establecer una clasificación dentro del conjunto total de alternativas. Las alternativas que cumplen esa propiedad con mayor intensidad son las que constituyen el conjunto solución de alternativas. En nuestro modelo de selección, las alternativas las clasificaremos basándonos en dos propiedades:

- *Propiedad de dominancia.* Indica el *grado de dominancia* de una alternativa sobre todas las demás.
- *Propiedad de no-dominancia.* Indica el *grado de no-dominancia* del resto de alternativas sobre una dada.

Para caracterizar ambas propiedades, presentamos dos grados de selección de alternativas guiados por cuantificadores, representando el concepto de mayoría de alternativas.

3.2.1. Grados de Selección de Alternativas

1. Grado de Dominancia Guiado por Cuantificador

Para la alternativa x_i, $i = 1,\ldots,n$, calculamos el *grado de dominancia guiado por un cuantificador,* $QGDD(\cdot)$, usado para cuantificar la dominancia que dicha alternativa tiene sobre el resto de alternativas en un sentido de mayoría difusa. Para una relación de preferencia difusa P, éste se define de la siguiente forma:

$$QGDD(x_i) = \phi_Q\left(p_{ij};\, j = 1,\ldots,n,\, j \neq i\right)$$

donde ϕ_Q es un operador OWA cuyos pesos se definen mediante un cuantificador relativo Q;

2. Grado de No-dominancia Guiado por Cuantificador

Para una relación de preferencia difusa P, el *grado de no-dominancia guiado por un cuantificador*, $QGNDD(\cdot)$, se define como:

$$QGNDD(x_i) = \phi_Q\left(1 - p_{ji}^d ;\, j = 1,\ldots,n,\, j \neq i\right)$$

donde

$$p_{ij}^d = max\left\{p_{ji} - p_{ij}, 0\right\}$$

representa el grado con el que la alternativa x_i es dominada de forma estricta por x_j.

En nuestro contexto, $QGNND(\cdot)$ proporciona el grado con el que una alternativa no es dominada por una mayoría difusa del resto de alternativas. Hacemos notar que cuando el cuantificador lingüístico Q representa la proposición *"todos "*, cuya agregación algebraica es el operador de conjunción *min*, entonces el grado de no-dominancia coincide con el concepto de alternativa no dominada de Orlovski [50], es decir este generaliza el concepto de no-dominancia de Orlovski. En efecto, Orlovski definió el concepto de grado por el que una alternativa es dominada por ninguna otra alternativa como sigue:

$$\mu^{ND}(x_i) = \min_j\left\{1 - p_{ij}^d\right\}$$

expresión que como hemos hecho notar anteriormente coincide con $QGNND(x_i)$ cuando usamos el cuantificador lingüístico *"todos"*, Q_-.

3.2.2. Políticas de Explotación

La aplicación de estos dos grados de selección la realizaremos aplicando dos políticas distintas de selección de alternativas: *proceso de selección secuencial* y *proceso de selección conjunta*.

1. *Política Secuencial.* Se trata en este caso de aplicar uno de los grados según las preferencias de los expertos, obteniendo con ello un conjunto selección de alternativas mucho más reducido que el original. Si este conjunto está formado por una sola alternativa, ésta sería la elección de grupo, mientras que si dicho conjunto está formado por más de una alternativa entonces se les aplicaría a dichas alternativas el segundo grado, obteniendo de esta forma el conjunto solución del proceso de decisión. Esta política define un *proceso de selección secuencial*.

2. *Política Conjunta*. En este caso se trataría de la aplicación simultánea de ambos grados al conjunto de alternativas X, obteniendo de esta forma dos conjuntos selección de alternativas, siendo el conjunto solución del proceso de decisión el obtenido como intersección de los dos conjuntos de selección de alternativas. Esta política define un *proceso de selección conjunta*.

Hacemos notar que el proceso de selección conjunta es más restrictivo que el proceso de selección secuencial porque es posible obtener un conjunto de selección vacío. Por tanto, un completo proceso de selección de alternativas para aplicar a un proceso de decisión constaría de tres etapas, a saber:

- Primera etapa. Consistente en la aplicación de los dos grados de selección de alternativas al conjunto X, obteniendo de esta forma los siguientes conjuntos de alternativas

$$X^{QGDD} = \left\{ x \in X \middle| QGDD(x) = \sup_{z \in X} \ QGDD(z) \right\}$$

$$X^{QGNDD} = \left\{ x \in X \middle| QGNDD(x) = \sup_{z \in X} \ QGNDD(z) \right\}$$

cuyos elementos reciben el nombre de *alternativas de dominancia máxima* sobre la mayoría difusa de elementos de X cuantificada por Q y *elementos no-*

dominados en grado máximo por la mayoría difusa de elementos de X cuantificada por Q, respectivamente.

- Segunda etapa. Obtención del conjunto selección $X^{QGCP} = X^{QGDD} \cap X^{QGNDD}$, el cual llamaremos de selección conjunta. Si $X^{QGCP} \neq \varnothing$, entonces finaliza el proceso de decisión, siendo éste el conjunto solución.

En caso contrario, continuar

- Tercera etapa. Consistente en la aplicación de uno de los dos posibles procesos de selección secuencial, según se siga un criterio de dominancia o de no dominancia respectivamente, de la forma siguiente:

  - Proceso de selección secuencial basado en dominancia. Si $\#\left(X^{QGDD}\right)=1$, entonces el proceso de decisión finaliza, siendo éste el conjunto solución. En otro caso, obtener:

$$X^{QG-DD-NDD} = \left\{ x \in X^{QGDD} \middle| QGNDD(x) = \sup_{x \in X^{QGDD}} QGNDD(z) \right\}$$

  Este es el conjunto selección de alternativas.

  - Proceso de selección secuencial basado en no dominancia. Si $\#\left(X^{QGNDD}\right)=1$, entonces el proceso de decisión finaliza, siendo éste el conjunto solución. En otro caso, obtener:

$$X^{QG-NDD-DD} = \left\{ x \in X^{QGNDD} \middle| QGDD(x) = \sup_{z \in X^{QGNDD}} QGDD(z) \right\}$$

  Este es el conjunto selección de alternativas.

En la práctica bastará con la aplicación de tan sólo uno de los anteriores grados de selección de alternativas para la obtención del conjunto solución del proceso de decisión.

4. Ejemplo

Consideremos el siguiente ejemplo ilustrativo del método de clasificación de alternativas estudiado en este capítulo. Supongamos un conjunto de seis expertos $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$, y un conjunto de cuatro alternativas $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Supongamos que los expertos e_1, e_2 proporcionan sus opiniones en forma de órdenes de preferencia, los expertos e_3, e_4 en forma de valores de utilidad y los expertos e_5, e_6 en forma de relaciones de preferencia difusas. Supongamos que la información es la siguiente:

$e_1 : O^1 = \{3,1,4,2\}$.

$e_2 : O^2 = \{3,2,1,4\}$.

$e_3 : U^3 = \{0.5,0.7,1,0.1\}$.

$e_4 : U^4 = \{0.7,0.9,0.6,0.3\}$.

$$e_5 : P^5 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 & 0.6 & 0.7 \\ 0.9 & 0.5 & 0.8 & 0.4 \\ 0.4 & 0.2 & 0.5 & 0.9 \\ 0.3 & 0.6 & 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

$$e_6 : P^6 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.7 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.8 & 0.6 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 & 0.8 \\ 0 & 0.4 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Utilizando las funciones de transformación l^1 y g^4 para hacer la información uniforme, tenemos:

$$e_1 : P^1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/6 & 2/3 & 1/2 \\ 5/6 & 1/2 & 1 & 2/3 \\ 1/3 & 0 & 1/2 & 1/6 \\ 1/2 & 1/3 & 5/6 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad e_2 : P^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 & 2/3 \\ 2/3 & 1/2 & 1/6 & 1/6 \\ 5/6 & 2/3 & 1/2 & 1 \\ 1/3 & 5/6 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$e_3 : P^3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 25/74 & 0.2 & 25/26 \\ 49/74 & 1/2 & 49/149 & 0.98 \\ 0.8 & 100/149 & 1/2 & 100/106 \\ 1/26 & 0.02 & 1/101 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad e_4 : P^4 = \begin{pmatrix} 1/2 & 49/130 & 49/85 & 49/58 \\ 81/130 & 1/2 & 81/117 & 0.9 \\ 36/85 & 36/117 & 1/2 & 0.8 \\ 9/58 & 0.1 & 0.2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Usando el concepto de mayoría difusa con el cuantificador *“al menos la mitad”*, con el par (0,0.5), y el correspondiente operador de agregación OWA con vector de pesos $\mathbf{w} = [1/3, 1/3, 1/3, 0, 0, 0]$, la relación de preferencia difusa colectiva es

$$P^c = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4049 & 0.6556 & 0.9355 \\ 0.8 & 0.5 & 0.8667 & 0.8489 \\ 0.6856 & 0.5485 & 0.5 & 0.9634 \\ 0.3778 & 0.6111 & 0.4111 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Aplicamos el proceso de selección con el cuantificador difuso *“la mayor parte de”*, con el par (0.3,0.8), y el correspondiente operador OWA con vector de pesos $\mathbf{w} = [1/15, 10/15, 4/15]$. En tal caso, los grados de selección de alternativas, guiados por dicho cuantificador, actuando sobre la relación de preferencia difusa colectiva proporcionan los siguientes valores:

	x_1	x_2	x_3	x_4
$QGDD_i$	0.6074	0.8370	0.6676	0.4156
$QGNDD_i$	0.8746	1	0.9152	0.4673

Estos valores representan el grado de dominancia que una alternativa tiene sobre *"la mayor parte"* de las alternativas para *"al menos la mitad"* de los expertos, y el grado de no-dominancia de una alternativa por *"la mayor parte"* de las alternativas para *"al menos la mitad"* de los expertos, respectivamente.

Claramente, los conjuntos solución de alternativas son

$$X^{QGDD} = \{x_2\} \quad \text{y} \quad X^{QGNDD} = \{x_2\}$$

por tanto, el conjunto solución de alternativas para todos los procedimientos está formado por una única alternativa $\{x_2\}$.

5. Consistencia del Modelo

En nuestro proceso de elección de alternativas, para ordenar las alternativas utilizamos como vector de prioridades el formado por los grados de no-dominancia asociados a cada una de las alternativas,

$$\text{QGNDD} = (QGNDD(1), \ldots, QGNDD(n)),$$

donde

$$QGNDD(i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} w_j \cdot b_{ij}, \text{siendo} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} w_j = 1, w_j \geq 0;\ p_{ji}^d = 1 - p_{ji}^s;\ p_{ji}^s = max\{p_{ji} - p_{ij}, 0\}$$

y $(b_{i1}, \ldots, b_{in})$ el vector de p_{ji}^d ordenadas de mayor a menor.

El otro vector de prioridades que puede ser utilizado en este caso, como ya hemos dicho, es el formado por los grados de dominancia,

$$\mathrm{QGDD} = (QGDD(1), \ldots, QGDD(n)),$$

siendo

$$QGDD(i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} w_j \cdot b_{ij}, \text{ donde } (b_{i1}, \ldots, b_{in}) \text{ es el vector de } p_{ij} \text{ ordenadas.}$$

En esta sección demostramos que las funciones de transformación dadas en las proposiciones 1 y 3 son consistentes, es decir, mantienen el orden de alternativas. Tratamos pues de demostrar el siguiente resultado:

Proposición 4. Sea $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ un conjunto de valores positivos (o de importancia) asociados a un conjunto de alternativas $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, con el cual podemos ordenarlas de mejor a peor. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que se verifica $0 < \alpha_1 \leq \ldots \leq \alpha_n \leq 1$. Entonces utilizando una función de transformación del tipo dado en las proposiciones 1 y 3, tenemos que,

1. $\forall s, i, j \in \{1, \ldots, n\}$ tales que $0 < \alpha_s \leq \alpha_i \leq \alpha_j \leq 1 \Rightarrow p_{is} \geq p_{ij}$.
2. $p_{i1} \geq \ldots \geq p_{i,i-1} \geq \frac{1}{2} \geq p_{i,i+1} \geq \ldots \geq p_{in} \quad \forall i = 1, \ldots, n.$.
3. $QGNDD(i) \geq QGDD(i) \quad \forall i = 1, \ldots, n.$.
4. $\left.\begin{array}{l} QGNDD(j) \geq QGNDD(i) \\ QGDD(j) \geq QGDD(i) \end{array}\right\} \quad \forall i < j$.

Demostración. Hacemos notar que las funciones de transformación de las proposiciones 1 y 3 pueden expresarse como sigue:

$$p_{ij} = \frac{1}{2} \cdot [1 + f(\alpha_i, \alpha_j) - f(\alpha_j, \alpha_i)]$$

siendo f una función creciente en el primer argumento y decreciente en el segundo argumento. En efecto, por la proposición 1 tenemos que $f(\alpha_i,\alpha_j)=\dfrac{s(\alpha_i)}{s(\alpha_i)+s(\alpha_j)}$ siendo s una función creciente y continua, verificando $s(0)=0$, mientras que por la proposición 3 tenemos que $f(\alpha_i,\alpha_j)=F(\alpha_i-\alpha_j)$ siendo F una función creciente.

Sean $s,i,j\in\{1,\dots,n\}$ tales que

$$0<\alpha_s\le\alpha_i\le\alpha_j\le 1$$

entonces tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} f(\alpha_i,\alpha_j)\le f(\alpha_i,\alpha_s)\\ f(\alpha_s,\alpha_i)\le f(\alpha_j,\alpha_i)\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{1}{2}\left\{\left[f(\alpha_i,\alpha_j)-f(\alpha_i,\alpha_s)\right]+\left[f(\alpha_s,\alpha_i)-f(\alpha_j,\alpha_i)\right]\right\}=$$

$$\frac{1}{2}\left\{\left[1+f(\alpha_i,\alpha_j)-f(\alpha_j,\alpha_i)\right]-\left[1+f(\alpha_i,\alpha_s)-f(\alpha_s,\alpha_i)\right]\right\}\le 0$$

y por tanto:

$$p_{is}\ge p_{ij}$$

es decir:

$$p_{i1}\ge\dots\ge p_{i,i-1}\ge\tfrac{1}{2}\ge p_{i,i+1}\ge\dots\ge p_{in}$$

Es claro, por tanto, que en este caso tenemos

$$QGNDD(i)=\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} w_j\cdot p_{ji}^d \quad \text{y} \quad QGDD(i)=\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} w_j\cdot p_{ij}\,.$$

Es decir, $QGNDD(i)\ge QGDD(i)$, pues la matriz P verifica $p_{ji}=1-p_{ij}$, por lo que $p_{ji}^d=\min\{2p_{ij},1\}\ge p_{ij}$.

Por otro lado, puesto que

$$\left.\begin{array}{l} f(\alpha_i,\alpha_k) \le f(\alpha_j,\alpha_k) \\ f(\alpha_k,\alpha_j) \le f(\alpha_k,\alpha_i) \end{array}\right\}$$

entonces

$$\begin{aligned} p_{ik} - p_{jk} &= \frac{1}{2}\left\{\left[1 + f(\alpha_i,\alpha_k) - f(\alpha_k,\alpha_i)\right] - \left[1 + f(\alpha_j,\alpha_k) - f(\alpha_k,\alpha_j)\right]\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\left[f(\alpha_i,\alpha_k) - f(\alpha_j,\alpha_k)\right] + \left[f(\alpha_k,\alpha_j) - f(\alpha_k,\alpha_i)\right]\right\} \le 0 \end{aligned}$$

es decir: $p_{jk} \ge p_{ik}$, $\forall\ (i, j, k)$ verificando $i < j$, lo que unido a $p_{i,k} \ge p_{i,k+1}$, implica que: $QGNDD(j) \ge QGNDD(i)$ y $QGDD(j) \ge QGDD(i)$, $\forall i < j$.

En las definiciones de los anteriores grados de dominancia y de no dominancia no se hacía uso de los valores diagonales de la matriz de preferencia P, motivo por el cual es habitual no definirlos. Veamos que la utilización de los valores de la diagonal principal no influye en el proceso de selección de alternativas, ya que se obtienen las mismas conclusiones que si no los utilizamos. Para no confundir utilizaremos la notaciones $TQGDD$ y $TQGNDD$ para los grados de dominancia y no dominancia en el caso de utilizar todos los valores p_{ij} para su cálculo.

Bajo las suposiciones de la proposición 4, para la relación de preferencia difusa obtenida mediante la aplicación de las anteriores funciones de transformación, se verifica:

$$p_{ji}^{d} = 1 \forall j = 1,\dots,i \ ; \ p_{ji}^{d} = 2 p_{ij} \forall j = i+1,\dots,n$$

por lo que:

$$TQGNDD(i) = 1 + \sum_{j=i+1}^{n} w_j \left(2 p_{ij} - 1\right),\ \forall i = 1,\ldots,n.$$

$$TQGDD(i) = \sum_{j=1}^{n} w_j\, p_{ij}\,,\ \ \forall i = 1,\ldots,n.$$

Es obvio demostrar entonces que:

Proposición 5. Se verifica:

1. $TQGDD(i) \leq TQGNDD(i), \forall\ i.$
2. $TQGDD(i) \leq TQGDD(j), \forall i \leq j.$
3. $TQGNDD(i) \leq TQGNDD(j), \forall i \leq j.$

Esto implica que de los dos grados anteriores sólo uno de ellos es necesario para la elección de alternativas cuando el número de éstas es finito y cuando las preferencias disponibles cumplan la propiedad de reciprocidad aditiva. Además, las propiedades anteriores son independientes de los pesos utilizados y por tanto del cuantificador utilizado. Este hecho nos permite presentar la siguiente propiedad:

Proposición 6. Se verifica:

$$\forall Q = (w_1,\ldots,w_n), \exists! \overline{Q} = (\overline{w}_1,\ldots,\overline{w}_{n-1})\ t.q. TQGNDD(i) = w_1 + (1-w_1)\cdot \overline{Q}GNDD(i),$$

siendo $\overline{w}_j = \dfrac{w_{j+1}}{1-w_1}$.

$$\forall \overline{Q} = (\overline{w}_1,\ldots,\overline{w}_{n-1}), \exists Q = (w_1,\ldots,w_n)\, t.q.\ \overline{Q}GNDD(i) = \frac{TQGNDD(i) - w_1}{1-w_1}, \text{siendo}$$

$$w_1 \in [0,1), w_{j+1} = (1-w_1)\cdot \overline{w}_j, \forall j = 1,\ldots,n-1.$$

Ejemplo: En el ejemplo anterior, los grados de selección de alternativas fueron calculados sin tener en cuenta los valores de la diagonal principal. Si estos valores son tenidos en cuenta, entonces habríamos obtenido los siguientes valores:

$$P^c = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4049 & 0.6556 & 0.9355 \\ 0.8 & 0.5 & 0.8667 & 0.8489 \\ 0.6856 & 0.5485 & 0.5 & 0.9634 \\ 0.3778 & 0.6111 & 0.4111 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Aplicando el proceso de selección a dicha relación de preferencia colectiva, con el cuantificador difuso *"la mayor parte de"* con el par (0.3,0.8), y el correspondiente operador OWA con vector de pesos en este caso $\mathbf{w} = [0,0.4,0.5,0.1]$, obtenemos los siguientes grados de selección de alternativas :

	x_1	x_2	x_3	x_4
$TQGDD_i$	0.5527216	0.789556	0.598498	0.443333
$TQGNDD_i$	0.945462	1	0.968183	0.57299

Claramente, los conjuntos solución de alternativas son

$$X^{TQGDD} = \{x_2\} \quad \text{y} \quad X^{TQGNDD} = \{x_2\}$$

y por tanto, el conjunto solución de alternativas solución para todos los procedimientos está formado por una única alternativa $\{x_2\}$, coincidiendo con lo obtenido anteriormente. Es más las ordenaciones de las alternativas coinciden en ambos casos.

Capítulo 3

Un Modelo de TDME con Diferentes Estructuras de Preferencia Basado en Relaciones de Preferencia Multiplicativas

En este Capítulo estudiamos el problema de TDME en el que la información sobre las alternativas se proporciona como órdenes de preferencia, funciones de utilidad y relaciones de preferencia multiplicativas, usando estas últimas como elemento base para representar uniformemente la información proporcionada. Para ello, obtendremos funciones de transformación de órdenes de preferencia y de funciones de utilidad en relaciones de preferencia multiplicativas. Presentamos un modelo de decisión para seleccionar la(s) mejor(es) alternativa(s), basado en el concepto de mayoría difusa, el cual, como ya hemos dicho, permite introducir una mayor flexibilidad en nuestro modelo de decisión porque todas las decisiones se obtienen basándose en una mayoría difusa de las preferencias de los expertos. En concreto, el modelo de decisión se construye utilizando un operador de agregación guiado por mayoría difusa, que definimos en este Capítulo, el *operador de agregación geométrico de ponderación ordenada (AGP)*, y dos grados de selección guiados por mayoría difusa definidos para relaciones de preferencia multiplicativas: *grado de dominancia y grado de no-dominancia guiados por cuantificador lingüístico.* La consistencia de este modelo la analizamos para garantizar que actúa coherentemente, para lo que mostraremos que las funciones de transformación no modifican la ordenación de las alternativas establecida por las diferentes estructuras de preferencia.

1. Presentación del Problema de TDME Basado en Relaciones de Preferencia Multiplicativas y Proceso de Resolución

Sea $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un conjunto finito de alternativas. Asumimos que las preferencias de los expertos, $e_k \in E$, $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$, sobre el conjunto de alternativas pueden ser proporcionadas en una de las tres siguientes formas:

1. Como un orden de preferencia de alternativas. Un experto, $e_k \in E$, proporciona sus preferencias sobre X en forma de un orden de preferencias individual, $O^k = \{o^k(1), \ldots, o^k(n)\}$, donde $o^k(\cdot)$ es una función de permutación sobre el conjunto de índices $\{1, \ldots, n\}$ [3,46,48,57,58]. De esta forma, un experto de acuerdo con su punto de vista proporciona un vector ordenado de alternativas de mejor a peor, sin otro tipo de información adicional.

2. Como una función de utilidad. Un experto, $e_k \in E$, proporciona sus preferencias sobre X a través de un conjunto de n valores (físicos o monetarios) de utilidad, $U^k = \{u_1^k, \ldots, u_n^k\}, u_i^k \in [0,1]$. El experto asocia a cada alternativa una valuación de utilidad la cual representa el grado de cumplimiento de su punto de vista por parte de dicha alternativa [19,43,46,57,60].

3. *Como una relación de preferencia multiplicativa.* En estos casos los procesos están ligados a cierto grado de credibilidad o preferencia de una cualquiera de las alternativas con respecto al resto. Con esta representación, las preferencias de un experto sobre el conjunto de alternativas X vienen representadas a través de una matriz de preferencia $A^k = \left(a_{ij}^k\right)$ verificando la propiedad: $a_{ij}^k \cdot a_{ji}^k = 1; a_{ij}^k > 0$. Este tipo de matriz de preferencia es la utilizada en aquellos procesos en los que se desea aplicar el método de jerarquía de Saaty [54,55,56]. Es normal tomar como rango para los elementos de la matriz A^k el intervalo cerrado $[1/9,9]$, aunque cualquier intervalo cerrado no conteniendo el valor 0 es apropiado en estos casos, debido a que dicho valor sólo surgiría en el caso de existir una alternativa valorada con una importancia 0, y por tanto prescindible. Una relación de preferencia multiplicativa se dice consistente cuando verifica la propiedad $a_{ij} \cdot a_{jk} = a_{ik}, \forall i, j, k.$ [54].

En este contexto, el proceso de resolución del problema de TDME consiste en la obtención de un conjunto solución de alternativas, $X_{sol} \subset X$, a partir de las preferencias proporcionadas por los expertos. Ya que los expertos proporcionan sus preferencias de forma diferente, lo primero que trataremos será el estudio de las relaciones entre las distintas estructuras de representación de preferencias, para de esta forma obtener una representación uniforme de las mismas, a partir de la cual aplicar un proceso de selección, que en nuestro caso se basará en relaciones de preferencia multiplicativas y en el concepto de mayoría difusa.

Este proceso de selección se desarrollará en dos fases, siendo la primera la fase de agregación de las relaciones de preferencia multiplicativas. En esta fase diseñaremos un nuevo operador de agregación guiado por mayoría difusa para agregar relaciones de preferencia multiplicativas. La segunda fase, llamada de explotación, consistirá en la selección de las alternativas que constituirán el conjunto solución del problema de

TDME. Para conseguir esto, en esta memoria definiremos dos grados de selección de alternativas distintos para relaciones de preferencia multiplicativas.

3. Representación Uniforme de la Información Basada en Relaciones de Preferencia Multiplicativas

Nuestro objetivo es estudiar la relación existente entre las tres estructuras de representación de preferencia y como consecuencia encontrar la expresión general de las funciones de transformación de valores de utilidad y de órdenes de preferencia en relaciones de preferencia multiplicativas.

2.1. Valores de Utilidad y Relaciones de Preferencia Multiplicativas

Tratamos pues de obtener una relación de preferencia multiplicativa sobre un conjunto de alternativas cuando cada alternativa tiene asociada una valuación, la cual se supone proporcionada sobre la base de una escala de razón. Supondremos pues que existe una función de valuación

$$r: X \rightarrow [0,1],$$

que asocia a cada alternativa del conjunto $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un número real del intervalo $[0,1]$ indicando el grado de cumplimiento por parte de dicha alternativa de cierto criterio o punto de vista.

2.1.1. Proceso de Obtención de la Función de Transformación de Valores de Utilidad en Relaciones de Preferencia Multiplicativa

En este caso, al igual que hiciéramos en el caso de relaciones de preferencia difusas, la intensidad de preferencia de una alternativa x_i sobre otra x_j, para dicho punto de vista, viene dada por

$$R(x_i, x_j) = h\left(r(x_i), r(x_j)\right),$$

siendo

$$h: [0,1] \times [0,1] \to R^+$$

una función creciente en el primer argumento y decreciente en el segundo argumento, verificando las siguientes propiedades:

1. $h(x,y) \cdot h(y,x) = 1$, $\forall x, y \in [0,1]$.
2. $h(x,x) = 1$, $\forall x \in [0,1]$.
3. $h(x,y) > 1$ si $x > y$, $\forall x, y \in [0,1]$.

- La propiedad 1 es la condición de reciprocidad.
- La propiedad 2 es una consecuencia de la propiedad 1, e indica la indiferencia de un experto entre dos alternativas verificando su criterio con igual intensidad.

- Finalmente, la propiedad 3 indica que entre dos alternativas, el experto prefiere a la alternativa con un mayor grado de valuación. Esta propiedad es consecuencia de la propiedad 2 y del hecho de ser la función, h, creciente en el primer argumento y decreciente en el segundo argumento.

Como ya tuvimos ocasión de mencionar, interpretando $\frac{r(x_i)}{r(x_j)}$ como una razón de la intensidad de preferencia de x_i sobre x_j, es decir, x_i es $\frac{r(x_i)}{r(x_j)}$ veces mejor que x_j, y asumiendo que la relación de preferencia es recíproca, el siguiente ejemplo ha sido propuesto y aplicado por Saaty [54]:

$$R(x_i,x_j)=h^1\left(r(x_i),r(x_j)\right)=\frac{r(x_i)}{r(x_j)}.$$

Obviamente, esta no es la única función que podemos utilizar para transformar valores de utilidad, dados sobre la base de una escala de razón, en relaciones de preferencia multiplicativas. Como veremos más adelante, ésta función no es más que un caso particular de una familia general de funciones de transformación.

La propiedad 1

$$h(x,y)\cdot h(y,x)=1\ ,\quad \forall x,y\in[0,1]$$

puede representarse en la forma paramétrica equivalente

$$h(x,y)=tg^2\gamma\ ,\ \ h(y,x)=\cot g^2\gamma\,,$$

donde $\gamma\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ representa el valor del ángulo vector de un punto con coordenadas cartesianas (x,y) o en general, $\left(q(x),q(y)\right)$, siendo

$$q:[0,1] \to R^+$$

una función creciente y continua. Tenemos entonces que

$$\gamma = arctg \frac{q(x)}{q(y)}$$

y por tanto

$$h(x,y) = \left[\frac{q(x)}{q(y)}\right]^2.$$

Finalmente, escribiendo $s(x) = [q(x)]^2$, tenemos

$$g(x,y) = \frac{s(x)}{s(y)}.$$

Resumiendo, tenemos la siguiente proposición:

Proposición 7. Sea $r: X \to [0,1]$ una función de valuación que asocia a cada alternativa del conjunto $X = \{x_1,\ldots,x_n\}$ un número real del intervalo $[0,1]$ indicando el grado de cumplimiento por parte de dicha alternativa de cierto criterio o punto de vista. Entonces, una relación de preferencia multiplicativa R sobre X viene representada por una matriz $A = (a_{ij})$ definida como sigue

$$a_{ij} = R(x_i, x_j) = h\left(r(x_i), r(x_j)\right) = \frac{s(r(x_i))}{s(r(x_j))},$$

donde $s:[0,1] \to R^+$ es una función creciente y continua.

Corolario 7.1. Cuando $s(x) = x$ entonces la función de transformación h se reduce a la función h^1 propuesta por Saaty.

Como dijimos anteriormente, un ejemplo particular de funciones de transformación son aquellas que obtienen el valor de intensidad de preferencia de una alternativa sobre otra basándose en el valor del cociente entre los respectivos valores de valuación de las alternativas, es decir, las transformaciones del tipo

$$R(x_i, x_j) = l\left(\frac{r(x_i)}{r(x_j)}\right).$$

El siguiente resultado proporciona la expresión general de este tipo de funciones, quedando el propuesto por Saaty como un caso particular.

Proposición 8. La solución general común de las ecuaciones funcionales

$$g(x, y) \cdot g(y, x) = 1$$

$$l\left(\frac{x}{y}\right) \cdot l\left(\frac{y}{x}\right) = 1$$

donde g es una función continua, creciente en el primer argumento y decreciente en el segundo, y l es una función creciente y continua, es :

$$g(x, y) = l\left(\frac{x}{y}\right) = \left(\frac{x}{y}\right)^c$$

siendo $c \in R_0^+$.

Demostración. Sabemos por la proposición 7 que

$$g(x,y)=\frac{s(x)}{s(y)},$$

siendo s es una función continua y creciente es la solución general de la primera ecuación funcional. Como tratamos de encontrar la solución común a ambas ecuaciones, entonces ha de ser:

$$l\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{s(x)}{s(y)}.$$

Se verifica entonces:

$$l(x)=l\left(\frac{x}{1}\right)=\frac{s(x)}{s(1)}\Rightarrow s(x)=s(1)\cdot l(x)\Rightarrow l\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{s(1)}{s(y)}=\frac{s(1)}{s(1)\cdot l(y)}=\frac{1}{l(y)}\Rightarrow$$

$$l(x\cdot y)=l\left(\frac{x}{\frac{1}{u}}\right)=\frac{s(x)}{s(\frac{1}{y})}=\frac{s(1)\cdot l(x)}{s(1)\cdot l(\frac{1}{y})}=\frac{l(x)}{l(\frac{1}{y})}=l(x)\cdot l(y)$$

cuya solución general es [1,23]

$$l(x)=x^{c}\ ,\ \ c>0,$$

es decir, la solución general de las ecuaciones funcionales anteriores es

$$g(x,y)=l\left(\frac{x}{y}\right)=\left(\frac{x}{y}\right)^{c}$$

como queríamos demostrar.

Este tipo de transformación de valores de utilidad en preferencias es la que debe utilizarse cuando las preferencias entre alternativas deseamos no cambien cuando las valuaciones de las alternativas se modifican en la misma proporción, es decir cuando las valuaciones vienen dadas sobre la base de una escala de razón. En efecto, si suponemos que

$$a_{ij} = h^2\left(r(x_i), r(x_j)\right) = h^2\left(k \cdot r(x_i), k \cdot r(x_j)\right)$$

entonces, tomando $k = \dfrac{1}{r(x_j)}$ tenemos que $h^2\left(r(x_i), r(x_j)\right) = h^2\left(\dfrac{r(x_i)}{r(x_j)}, 1\right) = l\left(\dfrac{r(x_i)}{r(x_j)}\right)$,

y por tanto aplicando el anterior resultado debe ser $a_{ij} = \left(\dfrac{r(x_i)}{r(x_j)}\right)^c$, $c > 0$. A esta función la notaremos de la siguiente forma $l^c(x) = x^c$.

2.2. Órdenes de Preferencia y Relaciones de Preferencia Multiplicativas

En esta sección mostraremos cómo obtener una relación de preferencia multiplicativa sobre un conjunto de alternativas cuando se dispone de éstas ordenadas de mejor a peor. En esta situación, a cada alternativa x_i se le puede asociar un valor en función de la posición que ocupa. Supondremos pues que existe una función de valuación

$$r : X \to [0,1]$$

que asocia a cada alternativa del conjunto $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un número real del intervalo $[0,1]$ indicando el grado de cumplimiento por parte de dicha alternativa de cierto criterio o punto de vista. Esta función adopta la expresión general $r(x_i) = v(n - o(i))$ siendo v una función creciente.

2.2.1. Proceso de Obtención de la Función de Transformación de Órdenes de Preferencia en Relaciones de Preferencia Multiplicativa

La intensidad de preferencia de una alternativa x_i sobre otra x_j, para dicho punto de vista, viene dada, al igual que en el apartado anterior, por

$$R(x_i, x_j) = h(r(x_i), r(x_j))$$

siendo

$$h: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [1/9, 9]$$

una función creciente en el primer argumento y decreciente en el segundo argumento, verificando las mismas propiedades de la sección 2.1.1..

Puesto que los valores de utilidad se suponen proporcionados sobre la base de una escala de diferencias, es lógico suponer que la función h dependa tan sólo de la diferencia entre los respectivos valores de utilidad asociados a las alternativas, es decir,

$$h(r(x_i), r(x_j)) = g(r(x_i) - r(x_j)).$$

siendo g una función creciente.

El problema que tratamos de resolver es, por tanto, el siguiente: Se trata de encontrar la expresión general de las funciones crecientes

$$g: [-1,1] \rightarrow [1/9, 9]$$

verificando las siguientes propiedades:

1. $g(x) \cdot g(-x) = 1$, $\forall x \in [-1,1]$.
2. $g(1) = 9$.

- La propiedad 1 es la propiedad de reciprocidad.
- Como consecuencia de la propiedad 1, debe verificarse que $g(0) = 1$, lo cual manifiesta la indiferencia de un experto entre dos alternativas con el mismo valor de utilidad.
- La propiedad 2 es una consecuencia del hecho de ser la función creciente y de utilizar la escala 1-9 para los valores de preferencia, y representa el hecho de que una alternativa es absolutamente preferida a otra cuando la diferencia entre los respectivos valores de utilidad asociados es máxima.

La propiedad 1 puede expresarse como sigue:

$$g(x) \cdot g(-x) = g(0) \ , \quad \forall x \in [-1,1],$$

lo que implica:

1º. $g(x) \cdot g(y) \cdot g(-x) \cdot g(-y) = [g(x) \cdot g(-x)] \cdot [g(y) \cdot g(-y)] = 1 \cdot 1 = 1 = g(0)$.

2º. $g(x+y) \cdot g(-x-y) = g[(x+y)+(-x-y)] = g(0)$.

y por consiguiente

$$g(x+y) \cdot g(-x-y) = g(x) \cdot g(y) \cdot g(-x) \cdot g(-y) .$$

Por simetría, ha de verificarse una de las siguientes cuatro ecuaciones funcionales:

a) $g(x+y) = g(x) \cdot g(y)$, $\forall x, y \in [0,1]$.

b) $g(x+y) = g(-x) \cdot g(y)$, $\forall x, y \in [0,1]$.

c) $g(x+y) = g(x) \cdot g(-y)$, $\forall x, y \in [0,1]$.

d) $g(x+y) = g(-x) \cdot g(-y)$, $\forall x, y \in [0,1]$.

Veamos que b), c) y d) no son posibles. Observamos que una vez demostrado que la ecuación funcional b) no es posible, se demuestra que la ecuación funcional c) tampoco es posible.

b) Supongamos que $g(x+y) = g(-x) \cdot g(y)$, $\forall x, y \in [0,1]$. Tomando $y = 0$ tenemos $g(x) = g(-x)$, $\forall x \in [0,1]$, lo cual unido a la propiedad de reciprocidad implica que $g(x) = \frac{1}{g(x)}$, $\forall x \in [0,1]$, es decir, $g(x) = 1$, $\forall x \in [0,1]$, lo cual está en contradicción con la propiedad 2.

d) De igual forma, si tomamos $y = 0$ entonces concluimos que $g(x) = g(-x)$, $\forall x \in [0,1]$, por lo que llegamos a la misma conclusión que en el caso anterior.

Concluimos pues que la función g debe verificar $g(x+y) = g(x) \cdot g(y)$, $\forall x, y \in [0,1]$. Por otro lado, es bien conocido que la solución general de la anterior ecuación funcional es $g(x) = \exp_a x$. Aplicando la propiedad 2, tenemos que $a = 9$, por lo que $g(x) = 9^x$.

Resumiendo, se verifica la siguiente proposición:

Proposición 9. Sea $r: X \to [0,1]$ una función de valuación que asocia a cada alternativa del conjunto $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un número real del intervalo $[0,1]$ indicando el grado de cumplimiento por parte de dicha alternativa de cierto criterio o punto de vista, dados sobre la base de una escala de diferencias. Entonces, una relación de preferencia multiplicativa R sobre X viene representada por una matriz $A = (a_{ij})$ definida como sigue

$$a_{ij} = R(x_i, x_j) = h\left(r(x_i), r(x_j)\right) = g\left(r(x_i) - r(x_j)\right) = 9^{r(x_i) - r(x_j)}.$$

3. Un Proceso de Selección para TDME Basado en Relaciones de Preferencia Multiplicativas Guiado por Mayoría Difusa

Una vez que hemos transformado los valores de utilidad y los órdenes de preferencia en relaciones de preferencia multiplicativas, para solucionar el problema de TDME tratado en este capítulo aplicaremos un proceso de selección que se basará en relaciones de preferencia multiplicativas y en el concepto de mayoría difusa. Este proceso de selección se aplicará en dos fases:

- *Fase de agregación*, en la que diseñaremos un operador de agregación para obtener una relación de preferencia multiplicativa colectiva a partir del conjunto de relaciones de preferencia multiplicativas individuales y con el que implementar el concepto de mayoría difusa.

- *Fase de explotación*, en la que definiremos dos grados diferentes de selección de alternativas para relaciones de preferencia multiplicativas con los que poder caracterizarlas y establecer una clasificación entre ellas, permitiéndonos obtener el conjunto solución de alternativas.

3.1. Agregación: Relación de Preferencia Multiplicativa Colectiva

Una vez que hemos uniformado la información, tenemos un conjunto de m relaciones de preferencia multiplicativas individuales, $A = \{A^1, \ldots, A^m\}$. De este conjunto de relaciones obtendremos una relación de preferencia multiplicativa colectiva, A^c. Cada valor, $a_{ij}^c \in [1/9,9]$, representará la preferencia de la alternativa x_i sobre la alternativa x_j para una mayoría de los expertos.

3.1.1. Diseño de un Operador de Agregación para Relaciones de Preferencia Multiplicativas

Normalmente, este tipo de relaciones se agregan utilizando la media geométrica [22] para conseguir una relación de preferencia colectiva también multiplicativa

$$A^c = \left(a_{ij}^c\right) \text{ donde } a_{ij}^c = \left(\prod_{l=1}^{m} a_{ij}^l\right)^{\frac{1}{m}}.$$

En efecto, en este caso es fácil comprobar que la media geométrica preserva la reciprocidad multiplicativa. Además, la media geométrica preserva la consistencia

$$a_{ij}^c \cdot a_{jk}^c = \left(\prod_{l=1}^{m} a_{ij}^l\right)^{\frac{1}{m}} \cdot \left(\prod_{l=1}^{m} a_{jk}^l\right)^{\frac{1}{m}} = \left(\prod_{l=1}^{m} a_{ij}^l \cdot a_{jk}^l\right)^{\frac{1}{m}} = \left(\prod_{l=1}^{m} a_{ik}^l\right)^{\frac{1}{m}} = a_{ik}^c\ ,\ \forall i,j,k\ .$$

Por otro lado, nuestra intención es la de introducir el concepto de mayoría difusa en los procesos de agregación que realicemos. En el caso de agregación de relaciones difusas usábamos un operador OWA guiado por un cuantificador lingüístico, que representaba el concepto de mayoría difusa que deseábamos implementar. Este tipo de operadores OWA tienen la propiedad de ser una generalización del operador media aritmética. Esta propiedad nos permite definir un operador de agregación geométrico ponderado (AGP) que generalice el operador media geométrica, y de paso permitirnos introducir el concepto de mayoría difusa utilizando dichos operadores guiados por un cuantificador que representaría dicha mayoría difusa. Por tanto, el operador AGP lo definiremos basándonos en el operador OWA [61] y en la media geométrica, y lo aplicaremos tanto en la fase de agregación, para obtener la relación de preferencia multiplicativa conjunta, como en la fase de explotación, para definir los grados de selección de alternativas, en el caso de relaciones de preferencia multiplicativas.

Definición: Sea $\{a_1,...,a_m\}$ un conjunto de valores que deseamos agregar, entonces un operador AGP de dimensión m es una función $\phi^G : R^m \to R$ definida como sigue

$$\phi^G(a_1,...,a_m) = \prod_{k=1}^{m} b_k^{w_k}$$

donde $\mathbf{w} = (w_1,...,w_m)$ es un vector de pesos exponenciales, tales que, $w_i \in [0,1]$ y $\sum_{i=1}^{m} w_i = 1$; y B es el vector de valores ordenados, siendo $b_i \in B$ el i-ésimo mayor valor del conjunto $\{a_1,...,a_m\}$.

La característica fundamental de un operador AGP reside en su vector de pesos, por lo que para diferentes vectores de pesos obtendremos diferentes operadores AGP. Podemos destacar tres casos particulares de operadores AGP por su importancia:

1. $\phi_-^G(a_1,...,a_m) = \min_k \{a_k; k = 1,...,m\}$. En este caso $\mathbf{w} = (0,0,...,0,1)$.
2. $\phi_+^G(a_1,...,a_m) = \max_k \{a_k; k = 1,...,m\}$. En este caso $\mathbf{w} = (1,0,...,0,0)$.
3. $\phi_{MG}^G(a_1,...,a_m) = \prod_{k=1}^{m} (a_k)^{1/m}$. En este caso $\mathbf{w} = (\frac{1}{m}, \frac{1}{m},..., \frac{1}{m}, \frac{1}{m})$.

Para calcular el vector de pesos de un operador AGP podemos utilizar el mismo procedimiento que el propuesto por Yager [61,62] en el caso de operadores OWA, es decir, usando un cuantificador lingüístico, Q, que representaría el concepto de mayoría difusa y por consiguiente nos permitiría introducirlo en nuestro proceso de resolución. En los casos de utilizar un cuantificador lingüístico, Q, para calcular los pesos de un operador AGP, ϕ^G , entonces tal operador se dirá guiado por cuantificador y será simbolizado por ϕ_Q^G. Como ya tuvimos ocasión de mencionar en el capítulo anterior, utilizando un cuantificador lingüístico relativo creciente para guiar el proceso de agregación, entonces el operador AGP se reduce al operador *min* cuando el cuantificador es *"todos",* al operador *max* cuando el cuantificador es *"al menos uno"* y al operador media geométrica cuando el cuantificador tiene como valores (a,b) el par $(0,1)$, cuantificador que por consiguiente puede llamarse *"media no ponderada"*.

El operador AGP satisface las siguientes propiedades:

1. El operador AGP tiene como cota inferior al operador *min* y como cota superior al operador *max:* $\phi_-^G(a_1,...,a_m) \leq \phi^G(a_1,...,a_m) \leq \phi_+^G(a_1,...,a_m)$.
2. El operador AGP es conmutativo.
3. El operador AGP es idempotente.
4. El operador AGP es monótono creciente.

3.1.2. Obtención de la Relación de Preferencia Multiplicativa Colectiva

Como ya hemos dicho, una vez uniformizada la información, disponemos de un conjunto de m relaciones de preferencia multiplicativas, $\{A^1,...,A^m\}$. La relación de preferencia multiplicativa colectiva A^c tiene por elemento ij-ésimo

$$a_{ij}^c = \phi_Q^G\left(a_{ij}^1,...,a_{ij}^m\right),$$

donde Q es el cuantificador lingüístico que representa el concepto de mayoría difusa de expertos que deseemos implementar. Dicho elemento representa la intensidad de preferencia medida en una escala 1-9 de la alternativa x_i sobre la alternativa x_j para una mayoría difusa de los expertos.

Hacemos notar que aunque el operador de agregación AGP generaliza al operador media geométrica esto no implica que verifique todas las propiedades que verifica este último. En efecto, mientras que el operador media geométrica mantiene la propiedad de reciprocidad multiplicativa para la relación de preferencia multiplicativa colectiva a partir de un conjunto de relaciones de preferencia multiplicativas individuales, en el caso de los operadores AGP esta propiedad no siempre se preserva. Es decir si $a_{ij}^k \cdot a_{ji}^k = 1, \forall k = 1,\ldots,m$ esto no implica que $a_{ij}^c \cdot a_{ji}^c = 1$.

3.2. Explotación: Elección de las Alternativas

Proponemos en este caso la utilización de dos grados de selección, ya definidos para relaciones de preferencia difusas, y que para una relación de preferencia multiplicativa, $A = (a_{ij})$, definimos como sigue.

3.2.1. Grados de Selección de Alternativas

1. Grado de Dominancia Guiado por Cuantificador. Para la alternativa x_i definimos el grado de dominancia guiado por cuantificador, $MQGDD_i$, como sigue:

$$MQGDD_i = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \log_9 \phi_Q^G \left(a_{ij}, j = 1,\ldots,n\right)\right).$$

Este grado se utiliza para cuantificar la dominancia que una alternativa tiene sobre una mayoría difusa de todas las demás alternativas.

2. Grado de No-dominancia guiado por Cuantificador. Para la alternativa x_i definimos el grado de no-dominancia guiado por cuantificador, $MQGNDD_i$, como sigue:

$$MQGNDD_i = 1 + \log_9 \phi_Q^G\left(r_{ij}, j = 1,...,n\right),$$

donde $r_{ij} = min\{a_{ij}, 1\}$. Este grado se utiliza para cuantificar el grado por el que una alternativa no es dominada por una mayoría difusa de todas las demás alternativas.

3.2.2. Políticas de Explotación

Para obtener el conjunto selección de alternativas podemos aplicar estos grados de selección siguiendo el esquema de selección presentado en el Capítulo 2:

- *Primera etapa.* Aplicamos cada uno de los dos grados de selección de alternativas a cada alternativa para obtener los siguientes conjuntos

$$X^{MQGDD} = \left\{x_i / x_i \in X, MQGDD_i = \sup_{x_j \in X} MQGDD_j\right\},$$
$$X^{MQGNDD} = \left\{x_i / x_i \in X, MQGNDD_i = \sup_{x_j \in X} MQGNDD_j\right\},$$

cuyos elementos llamaremos de máxima dominancia y maximales no dominados, respectivamente.

- *Segunda etapa.* Aplicamos la política de selección conjunta para obtener el siguiente conjunto de alternativas

$$X^{QGCP} = X^{MQGDD} \cap X^{MQGNDD}.$$

Este conjunto X^{QGCP} será el conjunto solución de alternativas si resulta no vacío. En caso contrario, continuamos

• *Tercera etapa.* Aplicamos una de las dos posibles políticas de selección secuencial, según apliquemos el criterio de dominancia o de no-dominancia.

- *Proceso de selección secuencial basado en Dominancia* $MQG - DD - NDD$

Si el conjunto X^{MQGDD} tiene sólo un elemento, entonces esta será la alternativa solución. En caso de que conste de más de una alternativa, seleccionaremos de entre ellas la de mayor grado de no-dominancia

$$X^{QG-DD-NDD} = \{x_i \,/\, x_i \in X^{MQGDD}, MQGNDD_i = \sup_{x_j \in X^{MQGDD}} MQGNDD_j\}.$$

- *Proceso de selección secuencial basado en No-dominancia* $MQG - NDD - DD$.

Si el conjunto X^{MQGNDD} tiene sólo un elemento, entonces esta será la alternativa solución. En caso de que conste de más de una alternativa, seleccionaremos de entre ellas la de mayor grado de dominancia

$$X^{QG-NDD-DD} = \{x_i \,/\, x_i \in X^{MQGNDD}, MQGDD_i = \sup_{x_j \in X^{MQGNDD}} MQGDD_j\}.$$

4. Consistencia del Modelo

Analizamos a continuación la consistencia del modelo de decisión multiplicativo construido utilizando las funciones de transformación obtenidas en las proposiciones 7 y 9, y los dos grados de selección guiados por cuantificadores. En particular, mostramos que las funciones de transformación actúan coherentemente con los dos grados de selección, porque el orden entre las alternativas obtenido a partir de una de las estructuras de representación de preferencias (orden de preferencia y función de utilidad) no se modifica si lo calculamos utilizando en su lugar la relación de preferencia multiplicativa obtenida a partir de ella mediante la aplicación de la correspondiente función de transformación y el cálculo sobre ésta de uno cualesquiera de los grados de selección definidos anteriormente. La demostración de esta propiedad es obvia pues es consecuencia de ser tanto el operador *AGP* como las funciones de transformación crecientes en sus variables. La siguiente proposición expresa esta propiedad:

Proposición 10. Sea $U^k = \{u_1^k,...,u_n^k\}$ $(O^k = \{o^k(1),...,o^k(n)\})$ un conjunto de valores de utilidad (orden de preferencia) asignados por un experto e_k al conjunto de alternativas X. Sea A^k la relación de preferencia multiplicativa obtenida aplicando la función de transformación dada en la proposición 7 u 8 (proposición 9). Si $u_j^k \geq u_i^k$ $(o^k(i) \geq o^k(j))$ entonces las relaciones entre los distintos grados de selección de las alternativas x_i y x_j, $(MQGDD_i^k, MQGNDD_i^k, MQGDD_j^k, MQGNDD_j^k)$, son:

1. $MQGDD_i^k \leq MQGDD_j^k$.
2. $MQGNDD_i^k \leq MQGNDD_j^k$.

Ejemplo: Supongamos el siguiente orden de preferencia $O = (3,1,4,2)$. Aplicando la función de transformación f^1 con $u_i^k = v(n - o^k(i)) = \frac{n-o^k(i)}{n-1}$, la correspondiente relación de preferencia multiplicativa es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 9^{\frac{-2}{3}} & 9^{\frac{1}{3}} & 9^{\frac{-1}{3}} \\ 9^{\frac{2}{3}} & 1 & 9 & 9^{\frac{1}{3}} \\ 9^{\frac{-1}{3}} & \frac{1}{9} & 1 & 9^{\frac{2}{3}} \\ 9^{\frac{1}{3}} & 9^{\frac{-1}{3}} & 9^{\frac{-2}{3}} & 1 \end{bmatrix}.$$

Los grados de selección aplicados a esta relación, con el cuantificador lingüístico *"la mayor parte de"* con el par de valores $(0.3,0.8)$, y el correspondiente operador *AGP* con vector de pesos, $\mathbf{w} = (0,0.4,0.5,0.1)$, dan los siguientes valores:

	x_1	x_2	x_3	x_4
$MQGDD_i$	0.383	0.717	0.367	0.383
$MQGNDD_i$	0.767	1	0.734	0.767

Es claro que estos grados de selección nos proporcionan el mismo orden de alternativas que el del orden de preferencias, pues si bien cabría decir que no es posible decidir entre las posiciones de la primera alternativa y la cuarta, al tener los mismos grados de selección con este particular cuantificador lingüístico, observando la relación de preferencia deducimos que la cuarta alternativa es preferida a la primera, tal y como quedaba reflejado en el orden de preferencia.

Supongamos por otra parte, el siguiente conjunto de valores de utilidad $U = \{0.5, 0.7, 1, 0.1\}$. Aplicando la función de transformación l^1, la correspondiente relación de preferencia multiplicativa es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{7} & \frac{1}{2} & 5 \\ \frac{7}{5} & 1 & \frac{1}{7} & 7 \\ 2 & 7 & 1 & 10 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{7} & \frac{1}{10} & 1 \end{bmatrix}.$$

Los grados de selección aplicados a esta relación, con el mismo cuantificador lingüístico *"la mayor parte de",* dan los siguientes valores:

	x_1	x_2	x_3	x_4
$MQGDD_i$	0.446	0.486	0.756	0.08
$MQGNDD_i$	0.892	0.911	1	0.16

Es claro que estos grados de selección nos proporcionan el mismo orden de alternativas que el obtenido mediante en conjunto de valores de utilidad, en este caso (x_3, x_2, x_1, x_4).

5. Ejemplo del Modelo Propuesto

Consideremos el siguiente ejemplo para ilustrar el modelo de clasificación de alternativas que acabamos de presentar. Supongamos un conjunto de seis expertos, $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\}$, y un conjunto de cuatro alternativas, $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$. Supongamos que los expertos e_1, e_2 proporcionan sus preferencias en forma de ordenes de preferencias; e_3, e_4 a través de un conjunto de valores de utilidad respectivamente, y los expertos e_5, e_6 mediante relaciones de preferencia multiplicativas. Supongamos que la información es la siguiente:

e_1: $O^1=(3,1,4,2)$ $\qquad$ e_2: $O^2=(3,2,1,4)$

e_3: $U^3=\{0.5,0.7,1,0.1\}$ $\qquad$ e_4: $U^4=\{0.7,0.9,0.6,0.3\}$

$$e_5:\ A^5=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 3 \\ 5 & 1 & 5 & 7 \\ 5 & \frac{1}{5} & 1 & 5 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{7} & \frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix} \qquad e_6:A^6=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{5}{2} & 9 \\ 1 & 1 & 4 & \frac{3}{2} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{4} & 1 & 4 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

1. Uniformidad de la información. Usando las funciones de transformación f^1 con $u_i^k=v\left(n-o^k(i)\right)=\frac{n-o^k(i)}{n-1}$, y l^1 para uniformar la información, tenemos:

$$A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 9^{\frac{-2}{3}} & 9^{\frac{1}{3}} & 9^{\frac{-1}{3}} \\ 9^{\frac{2}{3}} & 1 & 9 & 9^{\frac{1}{3}} \\ 9^{\frac{-1}{3}} & \frac{1}{9} & 1 & 9^{\frac{2}{3}} \\ 9^{\frac{1}{3}} & 9^{\frac{-1}{3}} & 9^{\frac{-2}{3}} & 1 \end{bmatrix} \qquad A^3 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{7} & \frac{1}{2} & 5 \\ \frac{7}{5} & 1 & \frac{1}{7} & 7 \\ 2 & 7 & 1 & 10 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{7} & \frac{1}{10} & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 9^{\frac{-1}{3}} & 9^{\frac{-2}{3}} & 9^{\frac{1}{3}} \\ 9^{\frac{1}{3}} & 1 & 9^{\frac{-1}{3}} & 9^{\frac{2}{3}} \\ 9^{\frac{2}{3}} & 9^{\frac{1}{3}} & 1 & 9 \\ 9^{\frac{-1}{3}} & 9^{\frac{-2}{3}} & \frac{1}{9} & 1 \end{bmatrix} \qquad A^4 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{7}{9} & \frac{7}{6} & \frac{7}{3} \\ \frac{9}{7} & 1 & \frac{3}{2} & 3 \\ \frac{6}{7} & \frac{2}{3} & 1 & 2 \\ \frac{3}{7} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

2. Proceso de Selección.

2.1. Agregación. Usando el concepto de mayoría difusa representado por el cuantificador lingüístico *"al menos la mitad"*, con el par de valores $(0,0.5)$, y el correspondiente operador AGP con vector de pesos, $\mathbf{w} = \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},0,0,0\right)$, entonces la matriz de preferencias colectiva, cuyos valores representan el grado de preferencia de una alternativa sobre otra para *al menos la mitad de* los expertos, es:

$$A^c = \begin{bmatrix} 1 & 0.822 & 1.824 & 5.130 \\ 3.557 & 1 & 5.646 & 5.278 \\ 3.511 & 2.133 & 1 & 7.663 \\ 1.326 & 0.420 & 0.307 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.2. *Explotación.* Aplicando el proceso de explotación utilizando el cuantificador lingüístico *"la mayor parte de"* con el par de valores $(0.3,0.8)$, y el correspondiente operador AGP con vector de pesos, $\mathbf{w} = (0,0.4,0.5,0.1)$, obtenemos los siguientes grados de selección de alternativas guiados por un cuantificador lingüístico sobre la base de la anterior matriz de preferencias colectiva:

	x_1	x_2	x_3	x_4
$MQGDD_i$	0.5504	0.7964	0.7005	0.576
$MQGNDD_i$	0.9911	1	1	0.7489

Estos valores representan la dominancia que una alternativa tiene sobre *la mayor parte de* las alternativas para *al menos la mitad de* los expertos y el grado de no-dominancia con el que una alternativa no es dominada por *la mayor parte de* las alternativas para *al menos la mitad de* los expertos, respectivamente.

Claramente, los conjuntos maximales son:

$$X^{TQGDD} = \{x_2\} \text{ y } X^{TQGNDD} = \{x_2, x_3\}$$

por lo que el conjunto solución de alternativas para todos las políticas de selección se reduce a una sola alternativa, que es: $\{x_2\}$.

Capítulo 4

Integración de Relaciones de Preferencia Difusas y Relaciones de Preferencia Multiplicativas

En esta sección estudiamos las funciones de transformación entre relaciones de preferencia difusas y relaciones de preferencia multiplicativas. Una vez obtenidas dichas transformaciones estaremos en condiciones de diseñar un modelo general de decisión para problemas de TDME en los que las preferencias puedan ser proporcionadas utilizando las cuatro distintas representaciones de preferencia que tratábamos de unificar en esta memoria. Además, estas funciones de transformación nos permitirán definir conceptos, que lo eran en exclusiva para relaciones difusas, para el caso de relaciones multiplicativas y viceversa. Por último, demostraremos la consistencia de la función de transformación de relaciones de preferencia difusas en relaciones de preferencia multiplicativas. Este resultado en unión de los resultados de capítulos previos nos permiten demostrar la consistencia del modelo general de TDME que integra las cuatro representaciones de preferencias.

1. Relaciones de Preferencia Difusas y Relaciones de Preferencia Multiplicativas

En esta sección estudiamos la relación entre relaciones de preferencia difusas $P=(p_{ij})$ y relaciones de preferencia multiplicativas $A=(a_{ij})$. Este problema se reduce al estudio de la relación existente entre los siguientes tipos de funciones:

a) $f:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ continua, creciente en el primer argumento y decreciente en el segundo argumento, verificando:

$$f(x,y)+f(y,x)=1.$$

Como vimos en el capítulo 2, la expresión general de este tipo de funciones utilizando una escala de razón es la siguiente:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{s(x)}{s(x)+s(y)} & (x,y)\neq(0,0)\\ 1/2 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

siendo $s:[0,1]\to R^{+}$ una función continua y creciente.

b) $g:[0,1]\times[0,1]\to R^{+}$ continua, creciente en el primer argumento y decreciente en el segundo argumento, verificando:

$$g(x,y)\cdot g(y,x)=1.$$

En el capítulo 3 obtuvimos la expresión general de este tipo de funciones utilizando una escala de razón, a saber:

$$g(x, y) = \frac{s(x)}{s(y)}$$

siendo $s:[0,1] \to R^+$ una función continua y creciente.

El siguiente resultado es obvio:

Proposición 11. Sea $g:[0,1] \times [0,1] \to R^+$ una función creciente en el primer argumento y decreciente en el segundo argumento verificando $g(x, y) \cdot g(y, x) = 1, \ \forall x, y \in [0,1]$. Entonces la función $f:[0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ definida por $f(x, y) = \dfrac{g(x, y)}{1 + g(x, y)}$ verifica $f(x, y) + f(y, x) = 1, \ \forall x, y \in [0,1]$.

Con este resultado, si los elementos de la relación A no están sujetos a ninguna restricción, es decir pueden tomar cualquier valor positivo o nulo, entonces la función de transformación de relaciones de preferencia multiplicativas en relaciones de preferencia difusas debería ser la dada en dicho resultado. Sin embargo, los elementos de una relación del tipo A, siguiendo las consideraciones de Saaty [54,55,56], en teoría se les impone su pertenencia al intervalo cerrado $[1/9, 9]$. En este caso, el número 9 indica que una alternativa es preferida a cualquier otra en su grado máximo. Esta situación, utilizando una relación de preferencia difusa P, se modela con el valor 1. Usando la función de transformación anterior, el valor correspondiente a 9 es 9/10 en lugar de 1, por lo que en este caso es necesario otro tipo de función de transformación.

1.1. Proceso de Obtención de la Función de Transformación de Relaciones de Preferencia Multiplicativas en Relaciones de Preferencia Difusas

En lo que sigue, detallamos la obtención de la expresión general de la función de transformación de relaciones de preferencia multiplicativas con rango el intervalo $[1/9,9]$ y las relaciones de preferencia difusas.

El problema consiste en encontrar la expresión general de la siguiente función continua

$$w: \left\{ A = \left(a_{ij}\right); a_{ij} \cdot a_{ji} = 1 \wedge a_{ij} \in [1/9,9] \right\} \rightarrow \left\{ P = \left(p_{ij}\right); p_{ij} + p_{ji} = 1 \wedge p_{ij} \in [0,1] \right\},$$

o equivalentemente, de la siguiente función continua:

$$w: [1/9,9] \rightarrow [0,1]$$

verificando:

$$w(x) + w(1/x) = 1 \quad \forall x$$

$$w(9) = 1.$$

Esta función puede expresarse de la forma:

$$w(x) = \frac{1}{2} + h(x) \quad \forall x,$$

lo que implica

$$h(x) + h(1/x) = 0 \quad \forall x$$

$$h(9) = \frac{1}{2}.$$

Tomando $x = 1$, tenemos:

$$h(1)+h(1)=0 \Rightarrow h(1)=0\,.$$

Como $1=x\cdot\frac{1}{x}$, tenemos:

$$h(x)+h(1/x)=h\left(x\cdot\frac{1}{x}\right)\quad\forall x\,.$$

Se verifica pues:

$$h(x)+h(y)+h(1/x)+h(1/y)=\left[h(x)+h(1/x)\right]+\left[h(y)+h(1/y)\right]=0+0=0$$

$$h\left[(x\cdot y)\cdot\left(\frac{1}{x\cdot y}\right)\right]=h(x\cdot y)+h\left(\frac{1}{x\cdot y}\right),$$

y por tanto:

$$h(x\cdot y)+h\left(\frac{1}{x\cdot y}\right)=h(x)+h(y)+h\left(\frac{1}{x}\right)+h\left(\frac{1}{y}\right)\quad\forall x,y\,.$$

Por simetría, solo es posible una de las cuatro siguientes ecuaciones funcionales:

a) $h(x\cdot y)=h(x)+h(y)\quad\forall x,y\,.$

b) $h(x\cdot y)=h(x)+h\left(\frac{1}{y}\right)\quad\forall x,y\,.$

c) $h(x\cdot y)=h\left(\frac{1}{x}\right)+h(y)\quad\forall x,y\,.$

d) $h(x\cdot y)=h\left(\frac{1}{x}\right)+h\left(\frac{1}{y}\right)\quad\forall x,y\,.$

Las ecuaciones funcionales b), c) y d) son imposibles pues la única función que verifica estas ecuaciones es la función nula, lo que contradice la condición $h(9)=\frac{1}{2}$. En efecto, supongamos que la función h verifica la condición b). Tomando $x=1$, tenemos

$$h(y) = h(1) + h\left(\frac{1}{y}\right) \quad \forall y\,.$$

Puesto que $h(1) = 0$ y $h(y) + h\left(\frac{1}{y}\right) = 0, \ \ \forall y$, entonces

$$h(y) = -h(y), \ \ \forall y \ \ \Rightarrow \ \ 2 \cdot h(y) = 0, \ \ \forall y \quad \Rightarrow \ \ h(y) = 0, \ \ \forall y\,.$$

De forma similar se demuestra que la solución de las ecuaciones funcionales c) y d) es la función nula. Esto quiere decir que la función h tiene que verificar la ecuación funcional a), cuya solución general es [1]:

$$h(z) = k \cdot \ln z\,, \ \ k \in R\,.$$

Ya que $h(9) = \frac{1}{2}$, entonces $k = \frac{1}{2 \cdot \ln 9}$, y por tanto

$$h(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln z}{\ln 9} = \frac{1}{2} \cdot \log_9 z \quad \forall z\,.$$

Resumiendo, tenemos la siguiente proposición:

Proposición 12. Supongamos un conjunto de alternativas, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, y asociado con él una relación de preferencia multiplicativa, $A = (a_{ij})$. Entonces, la correspondiente relación de preferencia difusa asociada es $P = (p_{ij})$, con

$$p_{ij} = w(a_{ij}) = \frac{1}{2} \cdot (1 + \log_9 a_{ij})\,.$$

Esta función de transformación permite introducir el concepto de mayoría difusa y otros en los procesos de toma de decisiones que utilizan las relaciones de preferencia multiplicativas como base para la representación de la información, así como estudiar la consistencia de relaciones de preferencia difusas a partir de sus relaciones de preferencia multiplicativas asociadas.

Ejemplo: Supongamos que la información proporcionada por un experto sobre un conjunto de cuatro alternativas $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ está representada mediante la relación de preferencia multiplicativa siguiente

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 3 \\ 5 & 1 & 5 & 7 \\ 5 & \frac{1}{5} & 1 & 5 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{7} & \frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces, aplicando la anterior función de transformación, la correspondiente relación de preferencia difusa es :

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.13 & 0.13 & 0.75 \\ 0.87 & 0.5 & 0.87 & 0.94 \\ 0.87 & 0.13 & 0.5 & 0.87 \\ 0.25 & 0.06 & 0.13 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Hacemos notar que en el Capítulo 2 establecimos el siguientes resultado:

“Dado un conjunto de valores de utilidad $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ sobre un conjunto de alternativas $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, entonces la función de transformación para obtener la relación de preferencia difusa sobre dicho conjunto de alternativas, $P = (p_{ij})$, basada en la diferencia $u_i - u_j$, es la siguiente $p_{ij} = \frac{1}{2}(1 + u_i - u_j)$”

Comprobamos que aplicando este resultado en conjunción con el obtenido en la proposición anterior, obtenemos la misma función de transformación de valores de utilidad basados en una escala de diferencias y relaciones de preferencia multiplicativas. En efecto, si $P = (p_{ij})$ es una relación de preferencia difusa entonces la correspondiente relación de preferencia multiplicativa asociada $A = (a_{ij})$ se obtiene aplicando la función inversa de la obtenida en la proposición 12., por lo que $a_{ij} = 9^{2p_{ij}-1}$. De esta forma, tenemos $a_{ij} = 9^{2p_{ij}-1} = 9^{u_i - u_j}$, lo que nos reafirma la bondad de las transformaciones obtenidas.

Por otro lado, presentamos el siguiente resultado que conecta el operador AGP con el operador OWA a través de la función de transformación obtenida.

Proposición 13. Sea $\{A^1,...,A^m\}$ un conjunto de relaciones de preferencia multiplicativas y A^c la relación de preferencia multiplicativa colectiva obtenida mediante la aplicación de un operador AGP ϕ_Q^G. Sea $\{P^1,...,P^m\}$ el conjunto de relaciones de preferencia difusas transformadas, $P^k = w(A^k)$, y P^d la relación de preferencia aditiva colectiva obtenida mediante la aplicación del operador OWA ϕ_Q. Entonces se verifica $P^c = P^d$, siendo $P^c = w(A^c)$.

Demostración. Aplicando la función de transformación tenemos $p_{ij}^k = \frac{1}{2} \cdot (1 + \log_9 a_{ij}^k)$. Por definición $a_{ij}^c = \phi_Q^G(a_{ij}^1,...,a_{ij}^m)$ y $p_{ij}^d = \phi_Q(p_{ij}^1,...,p_{ij}^m)$. Aplicando de nuevo la función de transformación tenemos $p_{ij}^c = \frac{1}{2} \cdot (1 + \log_9 a_{ij}^c)$.

Como la función logarítmica de base 9 es creciente, entonces si b_{ij}^k es el k-ésimo mayor valor de la colección $\{a_{ij}^1,...,a_{ij}^m\}$ entonces $q_{ij}^k = \frac{1}{2} \cdot (1 + \log_9 b_{ij}^k)$ es el k-ésimo mayor valor de la colección $\{p_{ij}^1,...,p_{ij}^m\}$, es decir:

$$p_{ij}^{c} = \frac{1}{2}\cdot\left(1+\log_9 a_{ij}^{c}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(1+\log_9 \phi_Q^G\left(a_{ij}^{k}, k=1,\dots,m\right)\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(1+\log_9 \prod_{k=1}^{m}\left(b_{ij}^{k}\right)^{w_k}\right) =$$
$$\frac{1}{2}\cdot\left(1+\sum_{k=1}^{m} w_k \cdot \log_9 b_{ij}^{k}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{k=1}^{m} w_k + \sum_{k=1}^{m} w_k \cdot \log_9 b_{ij}^{k}\right) = \sum_{k=1}^{m} w_k \cdot \left[\frac{1}{2}\cdot\left(1+\log_9 b_{ij}^{k}\right)\right] =$$
$$\sum_{k=1}^{m} w_k \cdot q_{ij}^{k} = \phi_Q\left(p_{ij}^{k}, k=1,\dots,m\right) = p_{ij}^{d}.$$

El siguiente diagrama sintetiza el resultado obtenido.

$$\begin{tikzcd}
\left\{A^1,\dots,A^m\right\} \arrow[r, "w"] \arrow[d, "OWG"'] & \left\{P^1,\dots,P^m\right\} \arrow[d, "OWA"] \\
A^c \arrow[r, "w"'] & P^c = P^d
\end{tikzcd}$$

2. Relaciones de Preferencia Difusas como Base de Representación Uniforme de la Información

El resultado que presentamos aquí incluye todos los resultados obtenidos sobre funciones de transformación, y en ese sentido puede considerarse como el teorema general a utilizar cuando se toman las relaciones de preferencia difusas como base para una representación uniforme de la información.

Teorema 14. Sea $X = \{x_1,\dots,x_n\}$ un conjunto de alternativas. Supongamos que v_i^k representa una evaluación de la alternativa x_i, es decir, una función que asocia cada alternativa x_i del conjunto X con un número real, el cual indica el cumplimiento por parte de dicha alternativa de un determinado punto de vista (experto o criterio), e_k. La intensidad de preferencia de la alternativa x_i sobre la alternativa x_j, p_{ij}^k, para dicho punto de vista viene dada por

$$p_{ij}^k = R(x_i, x_j) = \frac{1}{2} \cdot \left[1 + g(v_i^k, v_j^k) - g(v_j^k, v_i^k)\right]$$

donde g es una función verificando

1. $g(z,z) = 1/2 \qquad \forall z \in R$.
2. g es una función creciente en el primer argumento y decreciente en el segundo argumento.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que cuanto mayor es la evaluación de una alternativa, mejor satisface dicha alternativa el citado punto de vista. Esto implica que la intensidad de preferencia de la alternativa x_i sobre la alternativa x_j viene dada por

$$p_{ij}^k = R(x_i, x_j) = g(v_i^k, v_j^k)$$

donde g es una función creciente en el primer argumento y decreciente en el segundo argumento. La relación de preferencia difusas se suponen reciprocas, es decir, $p_{ij}^k + p_{ji}^k = 1$, por lo que

$$g(v_i^k, v_j^k) + g(v_j^k, v_i^k) = 1.$$

Tenemos entonces

$$g(z,z) = 1/2 \qquad \forall z \in R$$

$$g(v_i^k, v_j^k) = 1 - g(v_j^k, v_i^k),$$

consecuentemente,

$$p_{ij}^k = R(x_i, x_j) = g(v_i^k, v_j^k) = \frac{1}{2} \cdot 2g(v_i^k, v_j^k) = \frac{1}{2} \cdot [g(v_i^k, v_j^k) + g(v_i^k, v_j^k)] =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot [g(v_i^k, v_j^k) + 1 - g(v_j^k, v_i^k)]$$

Corolario 14.1.(Proposición 1) Supongamos un conjunto de n valores de utilidad $U^k = \{u_1^k, \ldots, u_n^k\}$ asociado con X. Si los valores de utilidad están basados en una escala de razón, entonces la preferencia de x_i sobre x_j viene dada por la función de transformación

$$p_{ij}^k = g(u_i^k, u_j^k) = \begin{cases} \dfrac{s(u_i^k)}{s(u_i^k) + s(u_j^k)} & if\ (u_i^k, u_j^k) \neq (0,0) \\ \dfrac{1}{2} & if\ (u_i^k, u_j^k) = (0,0) \end{cases}$$

donde $s{:}[0,1] \to R^+$ es una función creciente y continua, verificando $s(0) = 0$.

Demostración. En efecto, la expresión obtenida en la proposición 1 puede escribirse de la siguiente forma:

$$p_{ij}^k = \frac{s(u_i^k)}{s(u_i^k) + s(u_j^k)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot s(u_i^k)}{s(u_i^k) + s(u_j^k)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot s(u_i^k) + s(u_j^k) - s(u_j^k)}{s(u_i^k) + s(u_j^k)}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{s(u_i^k) + s(u_j^k)}{s(u_i^k) + s(u_j^k)} + \frac{s(u_i^k) - s(u_j^k)}{s(u_i^k) + s(u_j^k)} \right] = \frac{1}{2} \cdot \left[1 + \frac{s(u_i^k)}{s(u_i^k) + s(u_j^k)} - \frac{s(u_j^k)}{s(u_i^k) + s(u_j^k)} \right]$$

Corolario 14.2.(Proposición 3) Supongamos un conjunto de n valores de utilidad $U^k = \{u_1^k, \ldots, u_n^k\}$ asociado con X. Si los valores de utilidad están basados en una escala de diferencias, entonces la preferencia de x_i sobre x_j viene dada por la función de transformación,

$$p_{ij}^k = g(u_i^k, u_j^k) = F(u_i^k - u_j^k),$$

siendo F una función creciente.

Demostración. Puesto que los valores de utilidad están basados en una escala de diferencias, la comparación de éstos ha de hacerse restándolos, por lo que

$$p_{ij}^k = g\left(u_i^k, u_j^k\right) = F\left(u_i^k - u_j^k\right),$$

siendo F una función creciente.

Corolario 14.3.(Proposición 2) Supongamos que asociado a un conjunto de alternativas, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, tenemos un orden de preferencia, O^k. Entonces, el grado de preferencia de la alternativa x_i sobre x_j viene dada por la función de transformación

$$p_{ij}^k = g(o^k(i), o^k(j)) = F(o^k(j) - o^k(i)),$$

siendo F una función creciente.

Demostración. En este caso, $v_i^k = n - o^k(i)$, por lo que aplicando el resultado anterior obtenemos

$$p_{ij}^k = g\left(o^k(i), o^k(j)\right) = F\left(o^k(j) - o^k(i)\right)$$

siendo F una función creciente.

Corolario 14.4.(Proposición 12) Supongamos un conjunto de alternativas, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, y asociado con él una relación de preferencia multiplicativa, $A = \left(a_{ij}\right)$.

Entonces, la correspondiente relación de preferencia difusa, $P=\left(p_{ij}\right)$, asociada con A viene dada como sigue:

$$p_{ij}^{k}=R\left(x_i,x_j\right)=\frac{1}{2}\cdot\left[1+g\left(a_{ij}\right)-g\left(a_{ji}\right)\right],$$

donde $g\left(a_{ij}\right)=\frac{1}{2}\cdot\log_9 a_{ij}$.

Demostración. Obvia, pues

$$\begin{aligned}p_{ij}=w\left(a_{ij}\right)&=\frac{1}{2}\cdot\left(1+\log_9 a_{ij}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(1+\tfrac{1}{2}\log_9\left(a_{ij}\right)^2\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(1+\tfrac{1}{2}\left(\log_9 a_{ij}+\log_9 a_{ij}\right)\right)=\\&=\frac{1}{2}\cdot\left(1+\tfrac{1}{2}\left(\log_9 a_{ij}+\log_9\frac{1}{a_{ji}}\right)\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(1+\tfrac{1}{2}\left(\log_9 a_{ij}-\log_9 a_{ji}\right)\right)\\&=\frac{1}{2}\cdot\left(1+\tfrac{1}{2}\log_9 a_{ij}-\tfrac{1}{2}\log_9 a_{ji}\right).\end{aligned}$$

3. Consistencia de la Función de Transformación

El problema de TDME con información representada mediante relaciones de preferencia multiplicativas han sido amplia y profundamente estudiados por Saaty [54,55,56]. El método de ordenación de Saaty consiste en la obtención de un vector de prioridad a partir de una relación de preferencia multiplicativa consistente A, siendo éste el único autovector no nulo asociado al único autovalor no nulo de A, el cual coincide con el número de alternativas que deseamos comparar. Cuando la relación A es consistente y los elementos de A se interpretan como el número de veces que una alternativa es más importante que otra, este vector de prioridades es proporcional al vector formado por los respectivos grados de importancia de las alternativas. En el caso de tener un conjunto de $m+1$ relaciones de preferencia multiplicativas $\{B, A^1, \ldots, A^m\}$, entonces el cálculo del vector de prioridades global, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, utilizando el método AHP de Saaty se calcula de acuerdo al principio de composición jerárquico:

$$\boldsymbol{\alpha} = \sum_{k=1}^{m} b_k \cdot \boldsymbol{\alpha}^k$$

donde $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_m)$ y $\boldsymbol{\alpha}^k$, $k = 1, \ldots, m$, son los vectores de prioridad locales asociados, y calculados como hemos mencionado antes, a las relaciones $B, A^1, \ldots, A^m$ respectivamente. Según Saaty ha demostrado [54,55,56], cuando las relaciones de preferencia multiplicativas A^k son consistentes, se verifica $a_{ij}^k = \frac{\alpha_i^k}{\alpha_j^k}$.

En problemas de TDME con información representada mediante relaciones de preferencia difusas, los modelos de selección presentados en esta memoria se basan en los dos siguientes grados de selección: el grado de dominancia guiado por cuantificador y el grado de no dominancia guiado por cuantificador. Para una relación de preferencia difusa P^k los grados asociados a la alternativa x_i se denotan por $TQGDD_i^k$ y $TQGNDD_i^k$ respectivamente.

Proposición 15. Sea A^k una relación de preferencia multiplicativa consistente sobre un conjunto de alternativas $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Supongamos que el método del autovector proporciona grados de importancia verificando $\alpha_i^k \leq \alpha_j^k$, entonces los grados de dominancia obtenidos de la relación de preferencia difusa $P^k = w(A^k)$ verifican $TQGDD_i^k \leq TQGDD_j^k$.

Demostración. Dado un cuantificador lingüístico Q con vector de pesos $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n)$, el grado de dominancia guiado por tal cuantificador es

$$TQGDD_i^k = \phi_Q\left(p_{i1}^k,\ldots,p_{in}^k\right) = \sum_{t=1}^{n} w_t \cdot q_{it}^k ,$$

donde q_{it}^k es el t-ésimo mayor valor del conjunto $p_{i1}^k,\ldots,p_{in}^k$.

Aplicando la función de transformación $P^k = w\left(A^k\right)$ y la propiedad de consistencia de A^k $\left(a_{ij}^k = \dfrac{\alpha_i^k}{\alpha_j^k}\right)$, tenemos

$$TQGDD_i^k = \sum_{t=1}^{n} w_t \cdot \left[\tfrac{1}{2}\cdot\left(1+\log_9 a_{it}^k\right)\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[\sum_{t=1}^{n} w_t + \sum_{t=1}^{n} w_t \cdot \log_9 a_{it}^k\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[1+\log_9 \prod_t \left(a_{it}^k\right)^{w_t}\right] =$$
$$\frac{1}{2}\cdot\left[1+\log_9 \frac{\left(\alpha_i^k\right)^{\sum_t w_t}}{\prod_t\left(\alpha_t^k\right)^{w_t}}\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[1+\log_9 \frac{\alpha_i^k}{C}\right], \text{ siendo } C = \prod_t\left(\alpha_t^k\right)^{w_t}.$$

Como la función logarítmica de base 9 es creciente, entonces $\alpha_i^k \le \alpha_j^k$ implica $TQGDD_i^k \le TQGDD_j^k$, como queríamos demostrar.

Lema 15.1. Sea A^k una relación de preferencia multiplicativa consistente sobre un conjunto de alternativas $X = \{x_1,\ldots,x_n\}$. Supongamos que el método del autovector proporciona grados de importancia verificando $\alpha_i^k \le \alpha_j^k$. Sea $P^{k,s}$ la relación de preferencia estricta asociada a la relación de preferencia difusa $P^k = w\left(A^k\right)$. Se verifica $\#\left(P_i^{k,s}\right) \ge \#\left(P_j^{k,s}\right)$ siendo $P_t^{k,s} = \left\{p_{vt}^{k,s} \,\middle|\, p_{vt}^{k,s} = p_{vt}^k - p_{tv}^k \ge 0, \forall v\right\}$.

Demostración. Sabemos que $p_{vi}^{k,s} = max\left\{p_{vi}^k - p_{iv}^k, 0\right\} \ge 0, \forall v$. Entonces se verificará $p_{vi}^{k,s} = p_{vi}^k - p_{iv}^k$ cuando $p_{vi}^k - p_{iv}^k \ge 0$, condición que es equivalente a $\dfrac{\alpha_v^k}{\alpha_i^k} \ge \dfrac{\alpha_i^k}{\alpha_v^k} \Leftrightarrow \left(\alpha_v^k\right)^2 \ge \left(\alpha_i^k\right)^2 \Leftrightarrow \alpha_v^k \ge \alpha_i^k$ tras la aplicación de la función de transformación w y de la propiedad de consistencia de la relación de preferencia multiplicativa. Esto significa que $\forall v \mid \ \alpha_v^k \geq \alpha_i^k \Rightarrow p_{vi}^{k,s} \in P^{k,s}$ de lo que se deduce de forma inmediata que $\#\left(P_i^{k,s}\right) \geq \#\left(P_j^{k,s}\right)$.

Proposición 16. Sea A^k una relación de preferencia multiplicativa consistente sobre un conjunto de alternativas $X = \{x_1, ..., x_n\}$. Supongamos que el método del autovector proporciona grados de importancia verificando $\alpha_i^k \leq \alpha_j^k$, entonces los grados de no-dominancia obtenidos de la relación de preferencia difusa $P^k = w\left(A^k\right)$ verifican $TQGNDD_i^k \leq TQGNDD_j^k$.

Demostración. Dado un cuantificador lingüístico Q con vector de pesos $\mathbf{w} = (w_1, ..., w_n)$, el grado de dominancia guiado por tal cuantificador es por definición $TQGNDD_i^k = \phi_Q\left(1 - p_{1i}^{k,s}, ..., p_{ni}^{k,s}\right) = \sum_{t=1}^{n} w_t \cdot \left(1 - q_{ti}^{k,s}\right)$ donde $p_{vi}^{k,s} = max\{p_{vi}^k - p_{iv}^k, 0\}$, y $\left(q_{1i}^{k,s}, ..., q_{ni}^{k,s}\right)$ es el vector de componentes ordenadas de mayor a menor asociado a $\left(p_{1i}^{k,s}, ..., p_{ni}^{k,s}\right)$. Existe por tanto una permutación σ del conjunto de valores $\{1, ..., n\}$ tal que $q_{ti}^{k,s} = p_{\sigma(t)i}^{k,s}$.

La relación de preferencia difusa P^k asociada, mediante la función de transformación w, a la relación de preferencia multiplicativa consistente A^k es recíproca, es decir, se verifica $p_{ij}^k + p_{ji}^k = 1$, por lo que tenemos:

$$1 - q_{ti}^{k,s} = 1 - max\{p_{\sigma(t)i}^k - p_{i\sigma(t)}^k, 0\} = min\{1 - \left(p_{\sigma(t)i}^k - p_{i\sigma(t)}^k\right), 1\} = min\{2\, p_{i\sigma(t)}^k, 1\}.$$

Aplicando la propiedad de consistencia de A^k $\left(a_{ij}^k = \dfrac{\alpha_i^k}{\alpha_j^k} \right)$, tenemos que $p_{ij}^k = \dfrac{1}{2} \cdot \left(1 + \log_9 \dfrac{\alpha_i^k}{\alpha_j^k} \right)$. Puesto que $p_{ii}^k = \dfrac{1}{2}$ entonces $\exists n_i \in \{2,...,n\}$ tal que $1 - q_{ti}^{k,s} = 2p_{i\sigma(t)}^k, t = n_i,...,n$ y $1 - q_{ti}^{k,s} = 1, t = 1,...,n_i - 1$. Por tanto,

$$TQGNDD_i^k = \sum_{t=1}^{n_i - 1} w_t + \sum_{t=n_i}^{n} w_t \cdot 2p_{i\sigma(t)}^k = 1 + \sum_{t=n_i}^{n} w_t \cdot \left[2p_{i\sigma(t)}^k - 1 \right] =$$

$$1 + \sum_{t=n_i}^{n} w_t \cdot \log_9 a_{i\sigma(t)}^k = 1 + \log_9 \prod_{t=n_i}^{n} \left(a_{i\sigma(t)}^k \right)^{w_t}.$$

De igual forma:

$$TQGNDD_j^k = 1 + \log_9 \frac{\left(\alpha_j^k\right)^{\sum_{t=n_j}^{n} w_t}}{\prod_{t=n_j}^{n} \left(\alpha_{\sigma(t)}^k\right)^{w_t}}.$$

Por el lema 15.1. se verifica que $n - n_i + 1 \geq n - n_j + 1$ lo que implica $n_i \leq n_j$ y por tanto

$$\left(\alpha_j^k\right)^{\sum_{t=n_j}^{n} w_t} \geq \left(\alpha_i^k\right)^{\sum_{t=n_i}^{n} w_t}.$$

Por otro lado, como $\alpha_v^k \in [0,1]$ es claro que $\prod_{t=n_j}^{n} \left(\alpha_{\sigma(t)}^k\right)^{w_t} \leq \prod_{t=n_i}^{n} \left(\alpha_{\sigma(t)}^k\right)^{w_t}$. Concluimos por tanto afirmando que $TQGNDD_i^k \leq TQGNDD_j^k$, como queríamos demostrar.

Estas proposiciones establecen que los grados de dominancia y de no dominancia de la relación de preferencia difusa obtenida transformando una relación de preferencia multiplicativa consistente y el vector de prioridades de Saaty de esta última proporcionan el mismo orden de alternativas.

Además, como se desprende de estas proposiciones, mediante la aplicación de la función de transformación de relaciones de preferencia multiplicativas en relaciones de preferencia difusas, obtenemos a partir de las expresiones de los grados de dominancia y de no dominancia de una relación de preferencia difusa las expresiones para los grados de dominancia y no-dominancia en el caso de relaciones de preferencia multiplicativa, que ya habíamos definido en el capítulo anterior. De hecho, si A es una relación de preferencia multiplicativa consistente y $P = w(A)$ es la relación de preferencia difusa transformada, entonces se verifica:

$$MQGGD_i = TQGDD_i \text{ y } MQGNDD_i = TQGNDD_i \ , \forall i \ .$$

El anterior resultado es válido para cualquier cuantificador lingüístico utilizado en la representación del concepto de mayoría difusa. El siguiente ejemplo ilustra lo dicho.

Ejemplo: *Distribución de energía {Saaty, [55], pag. 46}.* En este ejemplo, Saaty trata de buscar los pesos en la distribución de energía de grandes consumidores con respecto a su contribución global en diferentes objetivos de la sociedad. Él asume que existen tres grandes usuarios de energía en E.E.U.U.: x_1 = usuarios domésticos, x_2 = transporte, y x_3 = plantas de generación de energía. Los objetivos según los cuales estos usuarios de energía se evalúan son: C_1 = contribución al crecimiento de la economía, C_2 = contribución a la preservación del medio ambiente, y C_3 = contribución a la seguridad nacional. La relación de comparación de estos tres objetivos (o criterios) se construye sobre la base de su impacto sobre el objetivo global de ventaja política y social, siendo:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1/5 & 1 & 3/5 \\ 1/3 & 5/3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Las relaciones de comparación de las tres alternativas con respecto a cada uno de estos criterios son los siguientes:

$$A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1/3 & 1 & 2 \\ 1/5 & 1 & 1 \end{bmatrix};\ A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1/2 & 1 & 5 \\ 1/7 & 1/5 & 1 \end{bmatrix};\ A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1/3 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Las correspondientes relaciones de preferencia difusas son las siguientes:

$$D = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.87 & 0.75 \\ 0.23 & 0.5 & 0.38 \\ 0.25 & 0.62 & 0.5 \end{bmatrix};\ P^1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.75 & 0.87 \\ 0.25 & 0.5 & 0.66 \\ 0.13 & 0.34 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.66 & 0.94 \\ 0.34 & 0.5 & 0.87 \\ 0.06 & 0.13 & 0.5 \end{bmatrix};\ P^3 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.66 & 0.75 \\ 0.34 & 0.5 & 0.66 \\ 0.25 & 0.34 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Los vectores de prioridades locales obtenidos utilizando el método de jerarquía de Saaty son:

$$\mathrm{b} = (0.65,0.13,0.22); \mathrm{a}^1 = (0.65,0.23,0.12); \mathrm{a}^2 = (0.59,0.33,0.08); \mathrm{a}^3 = (0.54,0.30,0.16),$$

siendo el vector de prioridades global, el siguiente:

$$\mathrm{a} = (0.62,0.26,0.12),$$

es decir, la alternativa x_1 es preferida a la alternativa x_2 y ésta lo es a la alternativa x_3.

En una situación como ésta, los vectores globales de grados de dominancia y de no dominancia que utilizaremos serán ,siguiendo el esquema de jerarquía de Saaty, los siguientes:

$$\mathbf{TQGNDD} = \sum_{k=1}^{m} TQGNDD^{D}(e_k) \cdot \mathbf{TQGNDD}^{k}$$

$$\mathbf{TQGDD} = \sum_{k=1}^{m} TQGDD^{D}(e_k) \cdot \mathbf{TQGDD}^{k},$$

donde e_k representa al experto (o criterio) k-ésimo.

Usando el criterio de dominancia para la clasificación de las alternativas, junto con los siguientes cuantificadores lingüísticos, los cuales representan el concepto de mayoría difusa,

1. Q_1: *La mayor cantidad posible de* con el par $(0.5,1)$.
2. Q_2: *Al menos la mitad* con el par $(0,0.5)$.
3. Q_3: *La mayor parte de* con el par $(0.3,0.8)$.
4. Q_4: *La media* con el par $(0,1)$.

tenemos los siguientes resultados:

1. Los vectores de dominancia locales para el cuantificador *"la mayor cantidad posible"* son los siguientes:

$$\mathbf{TQ_1GDD}^{D} = (0.58,0.21,0.33)$$
$$\mathbf{TQ_1GDD}^{1} = (0.58,0.33,0.20)$$
$$\mathbf{TQ_1GDD}^{2} = (0.59,0.39,0.08)$$
$$\mathbf{TQ_1GDD}^{3} = (0.55,0.39,0.28)$$

El vector de dominancia global normalizado es:

$$\mathbf{TQ_1GDD} = (0.44,0.35,0.21).$$

2. Para el cuantificador *"al menos la mitad"* obtenemos los siguientes vectores de dominancia locales:

$$\mathbf{TQ_2GDD}^D = (0.83, 0.46, 0.53)$$
$$\mathbf{TQ_2GDD}^1 = (0.83, 0.61, 0.45)$$
$$\mathbf{TQ_2GDD}^2 = (0.85, 0.75, 0.38)$$
$$\mathbf{TQ_2GDD}^3 = (0.72, 0.61, 0.45)$$

En este caso, el vector de dominancia global normalizado es:

$$\mathbf{TQ_2GDD} = (0.43, 0.34, 0.23).$$

3. Los vectores de dominancia locales al usar el cuantificador *"la mayor parte de "* son los siguientes:

$$\mathbf{TQ_3GDD}^D = (0.67, 0.30, 0.42)$$
$$\mathbf{TQ_3GDD}^1 = (0.67, 0.42, 0.27)$$
$$\mathbf{TQ_3GDD}^2 = (0.63, 0.45, 0.27)$$
$$\mathbf{TQ_3GDD}^3 = (0.61, 0.45, 0.31)$$

El vector de dominancia global normalizado es:

$$\mathrm{TQ_3\,GDD} = (0.47, 0.32, 0.21).$$

4. Por último, para el cuantificador *"la media"* obtenemos los vectores de dominancia locales siguientes:

$$\mathbf{TQ_4GDD}^D = (0.71, 0.34, 0.46)$$
$$\mathbf{TQ_4GDD}^1 = (0.71, 0.47, 0.32)$$
$$\mathbf{TQ_4GDD}^2 = (0.72, 0.57, 0.23)$$
$$\mathbf{TQ_4GDD}^3 = (0.64, 0.50, 0.36)$$

El vector de dominancia global normalizado en este caso es:

$$\mathbf{TQ_4GDD} = (0.46, 0.33, 0.21).$$

La ordenación de las alternativas es la misma que la proporcionada utilizando el método AHP de Saaty, y además coincide para todos los cuantificadores lingüísticos utilizados. Más aún, los grados de dominancia asociados a cada alternativa varía ligeramente al cambiar el cuantificador lingüístico.

4. Modelo General de TDME

El modelo de decisión que integra las cuatro representaciones de preferencias es el mismo que el presentado en el primer Capítulo con el añadido de la transformación en la primera etapa de las relaciones de preferencia multiplicativas en relaciones de preferencia difusas. Lo repetimos a modo de recordatorio:

1. *Uniformidad de la información.* Para cada orden de preferencia, conjunto de valores de utilidad y relación de preferencia multiplicativa obtenemos una relación de preferencia aditiva, para lo cual usamos las funciones de transformación obtenidas.

2. *Aplicación de un proceso de selección.* Este proceso de selección se desarrollará en dos fases:

   (a) *Fase de agregación.* Usando el concepto de mayoría difusa de expertos, aplicado en las operaciones de agregación mediante un operador *OWA*, obtenemos una relación de preferencia difusa colectiva a partir de todas las relaciones de preferencia difusas individuales.

   (b) *Fase de explotación.* De nuevo utilizamos el concepto de mayoría difusa, pero en el sentido de mayoría de las alternativas, para obtener dos grados de selección de alternativas: *el grado de dominancia y el grado de no dominancia* ambos guiados por cuantificadores.

5. Consistencia del Modelo General de TDME

La consistencia del modelo general de TDME integrando las cuatro representaciones de preferencia estudiadas en esta memoria queda garantizada por el hecho de ser consistente el modelo de TDME estudiados en el Capítulo 2, así como por la consistencia de la función de transformación de relaciones de preferencia multiplicativas en relaciones de preferencia difusas que hemos establecido en este capítulo. Además puesto que los grados de dominancia y no dominancia de relaciones de preferencia difusas y de relaciones de preferencia multiplicativas coinciden bajo la suposición de consistencia de las relaciones de preferencia multiplicativas, a partir de este momento podría afirmarse que el elemento base para uniformizar las preferencias puede ser tanto las relaciones de preferencia aditivas como las relaciones de preferencia multiplicativas.

6. Ejemplo

Consideremos el siguiente ejemplo ilustrativo del método de clasificación de alternativas estudiado en esta memoria. Supongamos un conjunto de siete expertos, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$, y un conjunto de cuatro alternativas, $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Supongamos que los expertos e_1, e_2 proporcionan sus preferencias en forma de ordenes de preferencias, e_3, e_4 a través de un conjunto de valores de utilidad respectivamente, e_5 mediante una relación de preferencia multiplicativa, mientras que los dos últimos expertos lo hacen proporcionando relaciones de preferencia difusas. Supongamos que la información es la siguiente:

e_1: $O^1 = (3,1,4,2)$

e_2: $O^2 = (3,2,1,4)$

e_3: $U^3 = \{0.5, 0.7, 1, 0.1\}$

e_4: $U^4 = \{0.7, 0.9, 0.6, 0.3\}$

$$e_5:\ A^5 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 3 \\ 5 & 1 & 5 & 7 \\ 5 & \frac{1}{5} & 1 & 5 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{7} & \frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix}$$

$$e_6:\ P^6 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 & 0.6 & 0.7 \\ 0.9 & 0.5 & 0.8 & 0.4 \\ 0.4 & 0.2 & 0.5 & 0.9 \\ 0.3 & 0.6 & 0.1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$e_7:\ P^7 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.7 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.8 & 0.6 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 & 0.8 \\ 0 & 0.4 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$$

1. *Uniformidad de la información.* Usando las funciones de transformación g^4, g^3 y w para uniformar la información, tenemos:

$$P^1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \; ; \; P^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{6} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$P^3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{25}{74} & 0.2 & \frac{25}{26} \\ \frac{49}{74} & \frac{1}{2} & \frac{49}{149} & 0.98 \\ 0.8 & \frac{100}{149} & \frac{1}{2} & \frac{100}{101} \\ \frac{1}{26} & 0.02 & \frac{1}{101} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \; ; \; P^4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{49}{130} & \frac{49}{85} & \frac{49}{58} \\ \frac{81}{130} & \frac{1}{2} & \frac{81}{117} & 0.9 \\ \frac{36}{85} & \frac{36}{117} & \frac{1}{2} & 0.8 \\ \frac{9}{58} & 0.1 & 0.2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$P^5 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.13 & 0.13 & 0.75 \\ 0.87 & 0.5 & 0.87 & 0.94 \\ 0.87 & 0.13 & 0.5 & 0.87 \\ 0.25 & 0.06 & 0.13 & 0.5 \end{bmatrix}$$

2. *Proceso de selección.*

(a) Agregación. Usando el concepto de mayoría difusa representándolo a través del cuantificador lingüístico *"al menos la mitad"*, con el par de valores $(0,0.5)$, y el correspondiente operador *OWA* con vector de pesos, $\mathrm{w} = (0.29,0.28,0.31,0.14,0,0,0)$, entonces la relación de preferencia colectiva, cuyos valores representan el grado de preferencia de una alternativa sobre otra para *al menos la mitad de* los expertos, es:

$$P^c = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.66 & 0.93 \\ 0.86 & 0.5 & 0.89 & 0.92 \\ 0.79 & 0.5 & 0.5 & 0.97 \\ 0.35 & 0.58 & 0.38 & 0.5 \end{bmatrix}$$

(b) Explotación. Aplicando el proceso de explotación utilizando el cuantificador lingüístico *"la mayor parte de"* con el par de valores $(0.3,0.8)$, y el correspondiente operador *OWA* con vector de pesos, $\mathrm{w} = (0,0.4,0.5,0.1)$, obtenemos los siguientes grados de selección de alternativas guiados por un cuantificador lingüístico sobre la base de la anterior relación de preferencia colectiva:

	x_1	x_2	x_3	x_4
$TQGDD_i$	0.554	0.836	0.616	0.425
$TQGNDD_i$	0.757	1	0.961	0.539

Estos valores representan la dominancia que una alternativa tiene sobre *la mayor parte de* las alternativas para *al menos la mitad de* los expertos y el grado de no-dominancia con el que una alternativa no es dominada por *la mayor parte de* las alternativas para *al menos la mitad de* los expertos, respectivamente.

Claramente, los conjuntos maximales son:

$$X^{TQGDD} = \{x_2\} \text{ y } X^{TQGNDD} = \{x_2\},$$

por lo que el conjunto solución de alternativas para todos las políticas de selección se reduce a una sola alternativa, que es: $\{x_2\}$.

Si usamos para representar el concepto de mayoría difusa el cuantificador lingüístico *"la mayor cantidad posible de"*, con el par de valores $(0.5,1)$, en lugar del cuantificador lingüístico *"al menos la mitad"*, y el correspondiente operador *OWA* con vector de pesos, $\mathrm{w} = (0,0,0,0.14,0.31,0.28,0.29)$, entonces la relación de preferencia colectiva, cuyos valores representan el grado de preferencia de una alternativa sobre otra para *la mayor cantidad posible de* los expertos, es:

$$P^c = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.16 & 0.23 & 0.65 \\ 0.62 & 0.5 & 0.51 & 0.44 \\ 0.36 & 0.13 & 0.5 & 0.64 \\ 0.09 & 0.1 & 0.15 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Aplicando el proceso de explotación utilizando el cuantificador lingüístico *"La mayor parte de"* , tenemos los siguientes grados de selección de alternativas guiados por un cuantificador lingüístico sobre la base de la anterior relación de preferencia colectiva:

	x_1	x_2	x_3	x_4
$TQGDD_i$	0.331	0.498	0.393	0.111
$TQGNDD_i$	0.889	1	0.969	0.563

Estos valores representan la dominancia que una alternativa tiene sobre *la mayor parte de* las alternativas para *la mayor cantidad posible de* expertos y el grado de no-dominancia con el que una alternativa no es dominada *por la mayor parte* de las alternativas para *la mayor cantidad posible de* expertos, respectivamente.

De nuevo se obtienen los mismos conjuntos maximales y por tanto el mismo conjunto solución de alternativas para todos las políticas de selección $\{x_2\}$.

Capítulo 5

Un Modelo de Consenso Global para Problemas de TDME con Diferentes Estructuras de Representación de Preferencia

En este capítulo, estudiamos el problema de cómo alcanzar consenso en problemas de TDME con diferentes estructuras de representación de preferencias. En concreto, supondremos que las preferencias pueden ser representadas mediante órdenes de preferencia, valores de utilidad, relaciones de preferencia multiplicativas y relaciones de preferencia difusas.

En primer lugar hacemos una breve introducción del problema del cálculo del consenso en TDME. A continuación proponemos un modelo de consenso para el problema de TDME que nos ocupa, que consta de dos fases, *la expresión de opiniones o preferencias* y *la discusión en grupo.* Este modelo de consenso lo basamos en dos criterios de consenso: *(i) una medida de consenso,* con la que evaluar el acuerdo existente entre los expertos y *(ii) una medida de proximidad* con la que evaluar, en caso de no existir un nivel de consenso satisfactorio, el grado de acuerdo de un experto con la solución del problema de TDME. La primera medida se calculará en la fase de expresión de opiniones y se utilizará para guiar el proceso de consenso y en última instancia para validar la solución final del problema, mientras que la segunda medida se utilizará para guiar a los expertos en la modificación de sus preferencia en la fase de discusión en grupo. De hecho, esta última medida la utilizaremos para proponer reglas sencillas y simples con las que diseñar un mecanismo de retroalimentación o feedback, que podrá utilizarse como sustituto del moderador en la mencionada fase de discusión. Por último, ilustraremos todo lo anterior mediante un ejemplo práctico llevado a cabo en un centro de enseñanza secundaria. En concreto, con este ejemplo, se pretendió ordenar una serie de causas que se cree tienen una influencia directa en el mal comportamiento de los estudiantes de secundaria dentro del aula.. Nos restringimos a la ordenación, de mayor a menor influencia, de tan sólo seis posibles causas de mal comportamiento en clase del alumnado. Para ello se invitó a un reducido grupo de profesores de secundaria a que expresaran sus opiniones respecto al grado de influencia que dichas posibles causas ejercían en que sus estudiantes presentaran un comportamiento incorrecto dentro del aula. La elección de un número reducido de posibles causas de mal comportamiento así como de un número igualmente reducido de profesores que proporcionaran sus opiniones sobre este tema, se debió exclusivamente a un motivo de simplicidad en el manejo de datos, unido al deseo de que el consenso se alcanzara rápidamente, como así ocurrió, para no cansar a los profesores que voluntariamente se prestaron a colaborar. Hemos de decir a favor de estos reducidos valores en el número de alternativas y de expertos el de haber sido suficientes para mostrar el funcionamiento del modelo de consenso que presentamos en el presente Capítulo.

1. Introducción

En los problemas de TDME dos son los procesos a desarrollar antes de obtener una solución final de dichos problemas [27]: *el proceso de selección y el proceso de consenso.* El primero ha sido presentado, estudiado y desarrollado en los capítulos precedentes, y hace referencia a cómo obtener el conjunto solución de alternativas, mientras que el segundo, el cual pretendemos estudiar en este capítulo, consiste en cómo obtener el máximo grado de consenso o acuerdo entre el conjunto de expertos sobre el conjunto solución de alternativas obtenido mediante la aplicación del modelo de selección, todo ello en base a las opiniones que sobre las alternativas tienen los referidos expertos. El consenso se ha convertido en una área importante de investigación en TDME, como lo demuestra el gran número de publicaciones que sobre ella han aparecido en los últimos años [8,9,10,27,33,36,41,42,45,71].

Normalmente, al inicio de todo problema de TDME las opiniones de los expertos suelen diferir sustancialmente, en cuyo caso es necesario desarrollar un proceso de consenso en un intento de obtener una solución al problema sobre la que dicho conjunto de expertos muestren cierto grado de aceptación. Clásicamente, consenso se define como acuerdo unánime y total de todos los expertos sobre todas las posibles alternativas. Sin embargo, esta definición de consenso es inconveniente para nuestros propósitos por dos razones fundamentalmente:

1. En primer lugar, nos permite diferenciar tan sólo entre dos posibles estados, la existencia y la ausencia de consenso. A efectos prácticos, una solución a un problema puede ser aceptada como solución de conjunto sin necesidad de que el 100% de los expertos la acepten sino que basta con que dicho porcentaje sea menor aunque suficientemente elevado (al menos mayor que un 50%).

2. En segundo lugar, las posibilidades de alcanzar tal acuerdo total, en caso de ser necesario, son prácticamente nulas. Es más, un acuerdo completo y unánime no es esencialmente necesario, incluso a veces es preferible evitarlo en la vida real.

Todo esto ha conducido a la definición y uso de un nuevo concepto de grado de consenso, el cual ha sido llamado grado de consenso “soft” [33], y por consiguiente lo que se intenta en los procesos de consenso es alcanzar el máximo grado de consenso posible entre los individuos, aunque éste no se ideal. En este sentido, un proceso de consenso se entiende como un proceso dinámico e iterativo, coordinado por un moderador, el cual ayuda a los individuos a acercar sus posiciones. Asumimos pues que la sesión con los expertos consta de dos fases [71]: *i) la expresión de opiniones* y *ii) discusión en grupo.* En cada paso del proceso de consenso, el moderador, una vez las opiniones de los expertos han sido expresadas, conoce el estado de consenso existente entre los individuos, a través de una medida de consenso, que establece la distancia al estado ideal de consenso [27,33,35]. Si considera que el nivel de consenso no es aceptable, es decir, si aún existe mucha discrepancia entre los individuos, lo cual puede implicar un rechazo por parte de éstos de la solución final del problema de TDME, urgirá a los mismos a discutir en profundidad sus opiniones en un intento de acercar posiciones y de esta forma aumentar el acuerdo y en consecuencia el consenso entre ellos [27,71]. Para hacer esto, proponemos la utilización de una medida de proximidad que nos permitirá proponer reglas simples y sencillas para ayudar a los expertos a conocer la dirección del cambio que de sus opiniones se requiere. Por el contrario, cuando el nivel de consenso es satisfactorio, el moderador aplicará el proceso de selección para obtener la solución final de consenso del problema de TDME [27].

2. Planteamiento

Tratamos pues de diseñar un modelo de consenso para un problema de TDME en el que se dispone de un conjunto de alternativas discreto, conocido y finito, $X = \{x_1, ..., x_n\}$, que han clasificarse de mejor a peor, para lo que se dispone de las preferencias de un conjunto de expertos, también discreto, conocido y finito, $E = \{e_1, ..., e_m\}$. Como hemos venido suponiendo a lo largo de la memoria, cada experto puede expresar sus preferencias mediante una cualesquiera de las siguientes cuatro representaciones: *órdenes de preferencia, valores de utilidad, relaciones de preferencia multiplicativas* y *relaciones de preferencia difusas*. Un proceso de resolución para este tipo de problemas ha sido presentado en el capítulo anterior, de tal forma que el problema de cómo obtener una solución para el problema en cuestión está resuelto.

Sin embargo, para que la solución obtenida mediante la aplicación del proceso de resolución sea *la solución final* del problema, es necesario que los expertos expresen un alto nivel de acuerdo o aceptación de la misma. Se hace necesario pues la aplicación de un proceso de consenso para este tipo de problemas y evaluar el grado de consenso de los expertos sobre la solución del problema, con el objetivo de obtener una *solución final de consenso*.

El proceso de consenso puede llevarse a cabo de forma independiente a la aplicación del proceso de selección. Si este es el caso entonces lo primero, en el problema de TDME, es aplicar el proceso de consenso tantas veces como sea necesario para alcanzar el nivel de consenso considerado suficiente para la aceptación por el grupo de la solución final del problema, y acto seguido se aplicaría el proceso de selección para obtener dicha solución. En este caso [8,22,33,35, 45], todos los autores han basado la definición de sus medidas de consenso en el concepto de coincidencia o distancia existente entre las opiniones de los individuos. No obstante, todos no han aplicado la misma idea de coincidencia. Unos han optado por la aplicación de una coincidencia rígida, es decir, en el momento de evaluar la coincidencia entre las opiniones de los individuos, aceptan sólo dos posibilidades, o total coincidencia (valor 1) o coincidencia nula (valor 0) [22,33,35,45], mientras que otros lo hicieron por una coincidencia flexible, aceptando además que entre los individuos pueden existir diferentes grados de coincidencia (valores en [0,1]) [8,33,35,45]. Un breve estudio de todas estas medidas puede ser consultado en [28].

Por otro lado, otra posible forma de definir medidas de consenso consiste en la aplicación del proceso de consenso en conjunción con la aplicación del proceso de selección [9]. Si este es el caso, entonces la definición de la medida de consenso se basaría en la comparación de las soluciones individuales de cada experto con la solución colectiva del problema de TDME. Esto implica que el primer paso a realizar en cada etapa del proceso de consenso sería la aplicación del proceso de selección para obtener tanto las soluciones individuales como la solución colectiva, en este caso llamada temporal. Una vez hecho esto, se mediría la coincidencia existente entre las soluciones individuales y la solución colectiva temporal, para obtener una medida de consenso entre los expertos.

Este segundo modelo es el que proponemos utilizar en nuestro problema de TDME, pues al poder las opiniones de los expertos ser representadas de forma diferente, la utilización del primer método (consenso seguido de selección) sería inaplicable salvo que la información se transformara a un modelo base de representación. Puesto que en cualquier caso la información ha de ser transformada, es lógico que se plantee la aplicación del segundo método (selección y consenso). Este método no es nuevo, sino que ya ha sido aplicado por otros autores entre los que destacamos [9], aunque en nuestro caso la comparación de las soluciones proponemos hacerla no sobre los grados de selección asociados a las alternativas sino a las posiciones que dichas alternativas tienen en una solución considerada, por la sencilla razón de que en un problema de TDME de los que estamos estudiando lo que se persigue es la ordenación de mejor a peor de las alternativas, siendo los grados de selección un medio para conseguir dicha ordenación. Más aún hay casos en los que tales grados de selección o no existen o no son necesarios, por ejemplo cuando un experto proporciona sus opiniones sobre un conjunto de alternativas mediante un orden de preferencias sin información adicional suplementaria, lo que suele ser habitual en muchos casos (esto no quiere decir que tal orden de preferencias sea poco fiable, pues quien lo utiliza lógicamente ha debido utilizar algún tipo de criterio para ordenar las alternativas, lo que ocurre es que simplemente no ha revelado dicho mecanismo por propia voluntad o porque no se lo fue requerido). Por otro lado, puede ser que dos órdenes de alternativas idénticos tengan asociados dos vectores de grados de selección distintos, por lo que una situación de consenso total puede dejar de serlo si se define una medida de consenso mediante la comparación de los grados de selección.

En base a todo esto, en las siguientes secciones presentamos un modelo de consenso basado en dos criterios de consenso:

a) Una medida de consenso: Con esta medida evaluamos el acuerdo existente entre todos los expertos. Se utilizará para guiar el proceso de consenso y en última instancia para validar la solución final del problema.

b) Una medida de proximidad: Esta medida evalúa el acuerdo (grado de coincidencia) entre las soluciones individuales de cada experto y la solución colectiva temporal. Se utilizará para guiar a los expertos en la modificación de sus opiniones en la fase de discusión en grupo del proceso de consenso. De hecho, esta medida la utilizaremos para proponer reglas sencillas y simples con las cuales diseñar un mecanismo de retroalimentación el cual podrá utilizarse como sustituto del moderador en la mencionada fase de discusión.

3. Modelo de Consenso

Como dijimos anteriormente, el consenso ha figurado de forma predominante como tema de investigación en los problemas de toma de decisiones. Aunque consenso tradicionalmente significa acuerdo total y unánime, desde un punto de vista práctico tiene sentido hablar de un grado de consenso. Por tanto, nosotros entendemos consenso como un parámetro mensurable cuyo máximo valor corresponde a unanimidad y mínimo valor a desacuerdo total.

Inicialmente, en cualquier problema de TDME no trivial, los expertos discrepan en sus opiniones, por lo que el consenso ha de verse como un proceso iterativo, lo que significa que el acuerdo se obtiene sólo tras varias rondas de consulta o discusión entre ellos. En cada una de estas rondas se calculan dos parámetros: una medida de consenso y una medida de proximidad. La primera guía el proceso de consenso mientras que la segunda se utiliza en la fase de discusión en grupo del proceso de consenso.

El principal problema que se plantea en un proceso de consenso es el de encontrar la forma de hacer que las posiciones individuales converjan y, por consiguiente, cómo ayudar a los expertos en la obtención y aceptación de una solución del problema de TDME.

Para hacer esto, se fija de antemano un nivel de consenso mínimo requerido para tal solución ($P_X^i < p,\ p \in [0,1]$). Cuando la medida de consenso alcanza este nivel entonces la sesión de toma de decisión finaliza y se procede a la obtención final del problema. Si éste no es el caso, las opiniones de los expertos deben modificarse. Esto ha de realizarse en una sesión de discusión en grupo, apoyándonos en una medida de proximidad para proponer un mecanismo de retroalimentación basado en reglas simples para ayudar a los expertos a cambiar sus opiniones.

Como hemos mencionado, el modelo de consenso que presentamos se llevará a cabo aplicando conjuntamente el proceso de selección, y se basará en la coincidencia de las soluciones individuales con la solución colectiva. Como ya hemos dejado dicho en la introducción, la comparación de soluciones habrá de realizarse para el problema de decisión que estamos estudiando utilizando las posiciones de las alternativas dentro de cada solución y no en los grados de selección. Esto es así por dos razones: 1) en primer lugar, en nuestro modelo cuando la información sobre el conjunto de alternativas se representa mediante un orden de preferencias entonces la única información disponible sobre las alternativas lo es la posición de éstas dentro del citado orden, por lo que la comparación de grados de selección en este supuesto no parece ser la mejor opción, y 2) en segundo lugar, porque puede darse el caso de comparar dos vectores ordenados de alternativas iguales con vectores de selección asociados distintos, por lo que al utilizar la comparación de éstos últimos en la definición de la medida de consenso, no se reflejaría un estado de consenso ideal. Además el objetivo de la resolución de un problema de TDME es el de ordenar las alternativas de mejor a peor, por lo que la necesidad en el uso de las posiciones de las alternativas dentro de las distintas soluciones (individuales y colectivas) surge de forma natural en la definición de las medidas de consenso. El modelo de consenso para este tipo de problemas de TDME se presenta en la figura siguiente y lo describiremos con más detalle en las siguientes secciones.

2.1. Medidas de Consenso y Proximidad

Cada parámetro de consenso requiere el uso de una función de disimilitud, $d\left(V^i, V^c\right)$, para obtener el nivel de acuerdo entre la solución individual del experto e_i, $V^i = \left(V_1^i, \ldots, V_n^i\right)$, donde V_j^i es la posición de la alternativa x_j para el experto i-ésimo , y la solución colectiva $V^c = \left(V_1^c, \ldots, V_n^c\right)$, donde V_j^c es la posición de la alternativa x_j en la solución colectiva. Entre las medidas que se han propuesto para la obtención de una medida de consenso se encuentran la distancia euclídea, la norma distancia L-1, las funciones seno y coseno del ángulo formado por dichos vectores, etc. [71]. Tales medidas eran aplicadas a los grados de selección asociados a las alternativas, aunque éstas pueden ser aplicadas directamente a los vectores formados por las posiciones de las alternativas en dichos vectores ordenados, que es lo que nosotros proponemos.

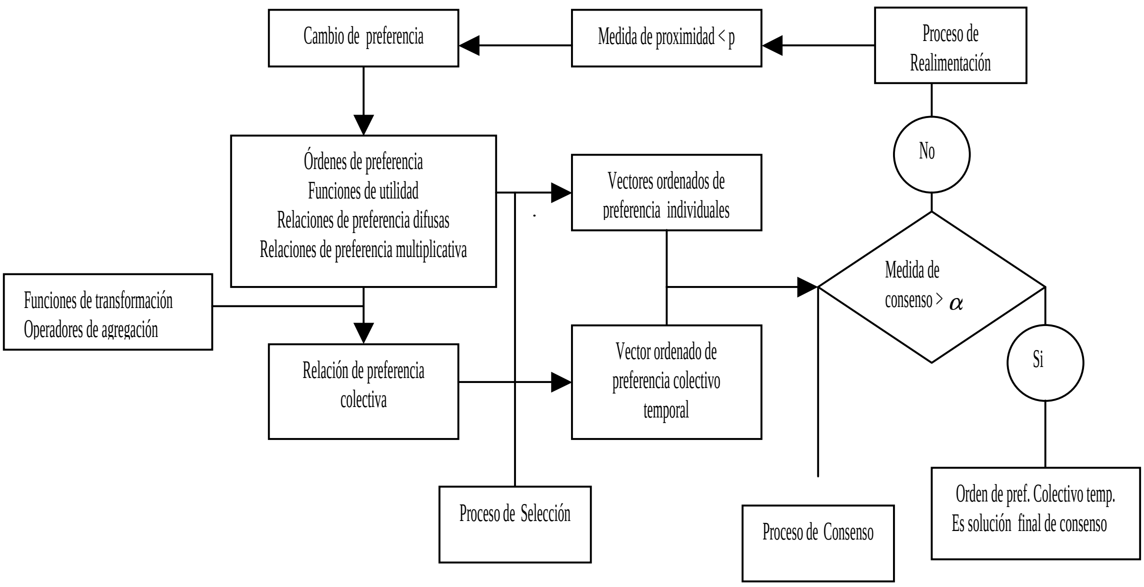

Figura 6. Diagrama del Proceso de Consenso de TDME

Por tanto, definimos indicadores de consenso mediante la comparación de las posiciones de las alternativas en dos vectores de preferencia como sigue:

1. Debido al hecho de que trabajamos con diferentes estructuras de preferencias, utilizamos el modelo de selección descrito en capítulos anteriores para obtener un vector ordenado de alternativas colectivo V^c (que llamaremos solución colectiva temporal).

2. Calculamos los vectores ordenados de alternativas (soluciones individuales) para cada experto $\{V^i; i = 1,...,m\}$. Esto es obvio cuando las preferencias se expresan mediante órdenes de preferencias o valores de utilidad. Cuando las preferencias han sido expresadas mediante relaciones de preferencia difusas entonces aplicamos el mismo proceso de selección aplicado en la obtención de la solución colectiva temporal. Si las preferencias están expresadas en forma de relación de preferencia multiplicativa entonces primero la transformamos en relación de preferencia difusa (hecho para calcular la solución colectiva) y después actuamos como anteriormente.

3. Para cada experto calculamos la proximidad para cada alternativa, notada $p_i(x_j)$, mediante la comparación de la posición de dicha alternativa en la solución individual de dicho experto y en la solución colectiva. Esta comparación debe hacerse utilizando una función $p_i(x_j) = p(V^i, V^c)(x_j) = f(V_j^c - V_j^i)$ que refleje la proximidad entre ambas posiciones. Esto implica que la función f debe ser creciente. Como función general de disimilitud consideraremos $f(x) = (a \cdot x)^b, b \geq 0$, y en particular usamos esta función tomando $a = \dfrac{1}{n-1}$.

$$p_i(x_j) = p(V^i, V^c)(x_j) = f(|\ V_j^c - V_j^i\ |) = \left(\frac{|\ V_j^c - V_j^i\ |}{n-1} \right)^b \in [0,1].$$

Al utilizar esta función de disimilitud observamos que los valores que se obtienen son mayores cuanto mayor es la diferencia entre las posiciones de la alternativa. Además esta diferencia puede ser acentuada disminuyendo el valor de b. Mostraremos esto en la siguiente sección tomando distintos valores (1,1/2,1/3) de la constante b.

4. Calculamos el grado de consenso de todos los expertos sobre cada alternativa. El grado de consenso sobre la alternativa x_j se calcula usando la siguiente expresión:

$$C(x_j) = 1 - \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i(x_j)}{m}.$$

5. La medida de consenso sobre el conjunto de alternativas, que notaremos C_X, se calculará mediante la agregación de los grados de consenso sobre las alternativas calculadas en 4. Consideramos importante llevar a cabo esta agregación de tal forma que el grado de consenso sobre las alternativas pertenecientes al conjunto solución tenga un mayor peso. Un operador de agregación que permite este tipo de agregación es el operador de agregación S-OWA OR-LIKE definido por Yager y Filev en [67], y que presentamos adaptado a nuestro objetivo de potenciar el consenso sobre las alternativas pertenecientes al conjunto solución.

$$C_X = S_{OWA\,OR-LIKE}\left(\{C(x_s); x_s \in X_{sol}\}, \{C(x_t); x_t \in X - X_{sol}\}\right) = (1-\beta)\cdot \sum_{j=1}^{v} \frac{C(x_j)}{v} + \beta \cdot C(x_s),$$

donde v es el cardinal del conjunto $X - X_{sol}$ y $\beta \in [0,1]$, es fijado a priori antes de aplicar el operador de agregación.

Obviamente, el valor de esta medida de consenso así definida depende de la elección del operador OWA aplicado en el proceso de selección y del operador S-OWA OR-LIKE aplicado para obtener C_X, especialmente en las primeras etapas del proceso de consenso, es decir, cuando la diferencia entre las preferencias de los expertos es grande, pero nosotros omitiremos cualquier referencia explícita a estos operadores, por simplicidad, en la notación de C_X.

6. La proximidad de la solución individual del experto i-ésimo con respecto a la solución colectiva temporal, la cual notaremos por P_X^i, se calcula mediante la agregación de la proximidad de dicho experto en las alternativas. De nuevo proponemos realizar esta agregación dándole mayor importancia a la proximidad de las alternativas solución, es decir usando de nuevo un operador S-OWA OR-LIKE:

$$P_X^i = S_{OWA\,OR-LIKE}\left(\{1 - |\ p_i(x_s)\ |; x_s \in X_{sol}\}, \{1 - |\ p_i(x_t)\ |; x_t \in X - X_{sol}\}\right).$$

Cuando el valor de proximidad asociado al experto i-ésimo es próximo a 1 entonces su contribución al consenso es alta (positiva) mientras que si dicha proximidad es cercana a 0 entonces su contribución al consenso es baja (negativa).

3.2. Mecanismo de Retroalimentación para Alcanzar Consenso

Cuando la medida de consenso C_X no ha alcanzado el nivel de consenso requerido, entonces las opiniones de los expertos deben ser modificadas. Como dijimos anteriormente, utilizaremos las medidas de proximidad ($p_i(x_j)$, P_X^i) para construir un mecanismo de retroalimentación para que los expertos puedan cambiar sus opiniones para conseguir de esa forma aproximarlas y por consiguiente aumentar el consenso. Este mecanismo realimentador se aplicará en tanto que el nivel de consenso no sea satisfactorio y cesará en su aplicación en cuanto un nivel de consenso satisfactorio (fijado a priori) sea alcanzado.

Las reglas de este mecanismo de consenso serán fáciles de entender y aplicar, y se expresarán de la siguiente forma: "Si la proximidad de la alternativa $p_i(x_j)$ es negativa (positiva) entonces la valuación asociada a dicha alternativa tiene que crecer (decrecer)", y se llevará a la práctica de la siguiente manera:

1. Cada experto e_i se clasifica de primero a último asociándoles sus respectivos valores de proximidad total P_X^i. A cada experto se le proporcionará su posición en este orden y sus valores de proximidad en cada alternativa.

2. Si la posición de un experto en esta clasificación es alta (primero, segundo, etc.) entonces dicho experto no tendrá que modificar sustancialmente sus opiniones, mientras que si su posición es baja (último, penúltimo) entonces sus opiniones tendrán que ser modificadas sustancialmente. En otras palabras, los primeros expertos que deben modificar sus opiniones serán aquellos cuyas soluciones individuales estén más alejadas de la

solución colectiva temporal. En este punto, tendremos que decidir un nivel mínimo de proximidad el cual al no ser alcanzado obligue a modificar opiniones, es decir, necesitamos una regla como la siguiente:

"Si $P_X^i < p,\ p \in [0,1]$ entonces cambie sus opiniones".

3. Las opiniones se modificarán siguiendo las siguientes tres reglas:

R.1. Si $V_j^c - V_j^i < 0,$ entonces aumentar las valoraciones asociadas a la alternativa x_j.

R.2. Si $V_j^c - V_j^i = 0,$ no modificar las valoraciones asociadas ala alternativa x_j.

R.3. Si $V_j^c - V_j^i > 0,$ entonces disminuir las valoraciones asociadas a la alternativa x_j.

Obviamente, el proceso de consenso dependerá del tamaño del grupo de expertos así como del número de alternativas, de forma que cuando dichos conjuntos son pequeños y las opiniones son homogéneas el nivel de consenso requerido es fácil de obtener. Por otro lado, hacemos notar que el cambio de opiniones puede provocar un cambio en la solución colectiva temporal, especialmente cuando las opiniones de los expertos son bastante dispares, es decir en las primeras etapas del proceso de consenso o cuando dos alternativas tienen grados de selección muy próximos en dicha solución colectiva. De hecho, cuando las opiniones de los expertos están próximas el cambio de opiniones no afectará a la solución colectiva temporal, sino que afectará tan solo a la medida de consenso. Este es un proceso convergente a la solución colectiva, una vez que la medida de consenso es suficientemente alto. Todo esto lo ilustraremos en la sección siguiente mediante un ejemplo práctico llevado a cabo con un grupo de ocho profesores y un conjunto de seis alternativas.

4. Ejemplo Práctico de Aplicación: Causas del mal comportamiento en clase

Uno de los principales problemas presentes hoy en día en el aula es el del mal comportamiento de los estudiantes. Encontrar las causas de este mal comportamiento y la influencia que tienen sobre éste tiene gran interés tanto para profesores como para todo aquel relacionado con la educación (padres, educadores, Departamento de Educación, etc.). Cohen y otros en [11] citan un estudio en el que una muestra de profesores de diferentes escuelas secundarias inglesas fueron preguntados por sus opiniones respecto a las causas que influyen directamente sobre el mal comportamiento de los estudiantes en el colegio. Entre estas causas fueron citadas:

C_1 Problemas en el hogar

C_2 Falta de interés en la materia o desinterés en el colegio

C_3 Inestabilidad psicológica o emocional del estudiante

C_4 Ausencia auto estima

C_5 Antipatía hacia el profesor

C_6 Uso de drogas

Esta lista se presentó a un grupo de ocho profesores españoles de enseñanza secundaria y se les preguntó sobre sus opiniones acerca de la influencia directa que estas causas tenían en el mal comportamiento de sus estudiantes en su instituto. Se prepararon para este propósito cuatro cuestionarios, uno para cada estructura diferente de preferencias. Las opiniones de los profesores fueron las siguientes:

$e_1 : O^1 = \{2,1,3,6,4,5\}$ $e_2 : O^2 = \{1,3,4,2,6,5\}$

$e_3 : U^3 = \{0.3,0.2,0.8,0.6,0.4,0.1\}$ $e_4 : U^4 = \{0.3,0.9,0.4,0.2,0.7,0.5\}$

$$e_5 : P^5 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.55 & 0.45 & 0.25 & 0.7 & 0.3 \\ 0.45 & 0.5 & 0.7 & 0.85 & 0.4 & 0.8 \\ 0.55 & 0.3 & 0.5 & 0.65 & 0.7 & 0.6 \\ 0.75 & 0.15 & 0.35 & 0.5 & 0.95 & 0.6 \\ 0.3 & 0.6 & 0.3 & 0.05 & 0.5 & 0.85 \\ 0.7 & 0.2 & 0.4 & 0.4 & 0.15 & 0.5 \end{bmatrix} \quad e_6 : P^6 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.7 & 0.75 & 0.95 & 0.6 & 0.85 \\ 0.3 & 0.5 & 0.55 & 0.8 & 0.4 & 0.65 \\ 0.25 & 0.45 & 0.5 & 0.7 & 0.6 & 0.45 \\ 0.05 & 0.2 & 0.3 & 0.5 & 0.85 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 & 0.4 & 0.15 & 0.5 & 0.75 \\ 0.15 & 0.35 & 0.55 & 0.6 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$e_7 : P^7 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1/3 & 1/4 & 4 & 6 \\ 3 & 3 & 1 & 7 & 6 & 9 \\ 1/4 & 4 & 1/7 & 1 & 1/2 & 3 \\ 1/3 & 1/4 & 1/6 & 2 & 1 & 4 \\ 1/5 & 1/6 & 1/9 & 1/3 & 1/4 & 1 \end{bmatrix} \quad e_8 : P^8 = \begin{bmatrix} 1 & 1/5 & 1/4 & 1/2 & 3 & 1/6 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 6 & 1/3 \\ 4 & 1/2 & 1 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 1/4 & 1/3 & 1 & 3 & 6 \\ 1/3 & 1/6 & 1/5 & 1/3 & 1 & 8 \\ 6 & 3 & 1/4 & 1/6 & 1/8 & 1 \end{bmatrix}$$

Primer paso del proceso de consenso

A. Medida de consenso

1. Usando las funciones de transformación $f^1\left(o_i^k, o_j^k\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{o_j^k - o_i^k}{n-1}\right)$, de órdenes de preferencia en relaciones de preferencia difusas, $f^2\left(u_i^k, u_j^k\right) = \frac{\left(u_i^k\right)^2}{\left(u_i^k\right)^2 + \left(u_j^k\right)^2}$, de valores de utilidad en relaciones de preferencia difusas, y $f^3\left(a_{ij}^k\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \log_9 a_{ij}^k\right)$, de relaciones de preferencia multiplicativas en relaciones de preferencia difusas, para uniformar la información, tenemos:

$$P^1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.6 & 0.9 & 0.7 & 0.8 \\ 0.6 & 0.5 & 0.7 & 1 & 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.3 & 0.5 & 0.8 & 0.6 & 0.7 \\ 0.1 & 0 & 0.2 & 0.5 & 0.3 & 0.4 \\ 0.3 & 0.2 & 0.4 & 0.7 & 0.5 & 0.6 \\ 0.2 & 0.1 & 0.3 & 0.6 & 0.4 & 0.5 \end{bmatrix} \quad P^2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.7 & 0.8 & 0.6 & 1 & 0.9 \\ 0.3 & 0.5 & 0.6 & 0.4 & 0.8 & 0.7 \\ 0.2 & 0.4 & 0.5 & 0.3 & 0.7 & 0.6 \\ 0.4 & 0.6 & 0.7 & 0.5 & 0.9 & 0.8 \\ 0 & 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.1 & 0.3 & 0.4 & 0.2 & 0.6 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$P^3 = \begin{bmatrix} 0.50 & 0.69 & 0.12 & 0.20 & 0.36 & 0.90 \\ 0.31 & 0.50 & 0.06 & 0.10 & 0.20 & 0.80 \\ 0.88 & 0.94 & 0.50 & 0.64 & 0.80 & 0.98 \\ 0.80 & 0.90 & 0.36 & 0.50 & 0.69 & 0.97 \\ 0.64 & 0.80 & 0.20 & 0.31 & 0.50 & 0.94 \\ 0.1 & 0.20 & 0.02 & 0.03 & 0.06 & 0.50 \end{bmatrix} \quad P^4 = \begin{bmatrix} 0.50 & 0.10 & 0.36 & 0.69 & 0.16 & 0.26 \\ 0.90 & 0.50 & 0.84 & 0.95 & 0.62 & 0.76 \\ 0.64 & 0.16 & 0.50 & 0.80 & 0.25 & 0.39 \\ 0.31 & 0.05 & 0.20 & 0.50 & 0.08 & 0.14 \\ 0.84 & 0.38 & 0.75 & 0.92 & 0.50 & 0.66 \\ 0.74 & 0.24 & 0.61 & 0.86 & 0.34 & 0.50 \end{bmatrix}$$

$$P^7 = \begin{bmatrix} 0.50 & 0.34 & 0.25 & 0.82 & 0.75 & 0.87 \\ 0.66 & 0.50 & 0.25 & 0.18 & 0.82 & 0.91 \\ 0.75 & 0.75 & 0.50 & 0.94 & 0.91 & 1 \\ 0.18 & 0.82 & 0.06 & 0.50 & 0.34 & 0.75 \\ 0.25 & 0.18 & 0.09 & 0.66 & 0.50 & 0.82 \\ 0.13 & 0.09 & 0 & 0.25 & 0.18 & 0.50 \end{bmatrix} \quad P^8 = \begin{bmatrix} 0.50 & 0.13 & 0.18 & 0.34 & 0.75 & 0.09 \\ 0.87 & 0.50 & 0.66 & 0.82 & 0.91 & 0.25 \\ 0.82 & 0.34 & 0.50 & 0.75 & 0.87 & 0.82 \\ 0.66 & 0.18 & 0.25 & 0.50 & 0.75 & 0.91 \\ 0.25 & 0.09 & 0.13 & 0.25 & 0.50 & 0.97 \\ 0.91 & 0.75 & 0.18 & 0.09 & 0.03 & 0.50 \end{bmatrix}$$

Utilizando el criterio de mayoría difusa con el cuantificador *“la mayor parte de”*, representado por el par (0.3,0.8), y el correspondiente operador de agregación OWA con vector de pesos, $\mathbf{w} = \left[0,0,\frac{3}{20},\frac{5}{20},\frac{5}{20},\frac{5}{20},\frac{2}{20},0\right]$, la relación de preferencia difusa colectiva es

$$P^c = \begin{bmatrix} 0.500 & 0.439 & 0.373 & 0.556 & 0.649 & 0.644 \\ 0.469 & 0.500 & 0.583 & 0.651 & 0.615 & 0.750 \\ 0.535 & 0.358 & 0.500 & 0.709 & 0.680 & 0.643 \\ 0.332 & 0.228 & 0.260 & 0.500 & 0.603 & 0.598 \\ 0.298 & 0.303 & 0.273 & 0.287 & 0.500 & 0.745 \\ 0.235 & 0.215 & 0.282 & 0.312 & 0.202 & 0.500 \end{bmatrix}.$$

El proceso de explotación lo aplicamos con el cuantificador difuso *“la mayor cantidad de”*, con el par (0.5,1), y el correspondiente operador de agregación OWA con vector de pesos, $\mathbf{w} = \left[0,0,0,\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$. Como ya probamos en el anterior capítulo, cuando la información es consistente entonces se obtiene el mismo vector ordenado de alternativas independientemente del grado de selección que se utilice (dominancia o no-dominancia) así como del cuantificador lingüístico utilizado. Sin embargo, cuando la información (relaciones de preferencia difusas o multiplicativas) no es consistente, la aplicación de los dos grados de selección puede proporcionar distintos vectores ordenados de alternativas. En una situación real las preferencias cuando se expresan mediante relaciones de preferencias pueden y suelen presentar inconsistencias, por lo que a la hora de obtener la solución colectiva e individuales utilizaremos tan sólo uno de los dos grados de selección, en nuestro caso el grado de dominancia. El grado de dominancia guiado por el cuantificador anterior al aplicarlo sobre la relación de preferencia colectiva proporciona los siguientes valores:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
$QGDD_i$	0.437	0.517	0.464	0.273	0.286	0.217

Estos valores representan la dominancia que cada alternativa tiene sobre “la mayor parte de” las alternativas para “la mayor cantidad de” profesores. Claramente, la causa que mayor influencia tiene en el comportamiento incorrecto de un estudiante en el instituto, para este grupo de profesores, es C_2: falta de interés en la materia o desinterés general en el colegio, mientras que el orden colectivo de causas de mayor a menor influencia en el mal comportamiento de los estudiantes es $\{C_2, C_3, C_1, C_5, C_4, C_6\}$.

2. Por otro lado, los órdenes individuales , calculados utilizando el mismo cuantificador lingüístico y el mismo proceso de selección en el caso de relaciones de preferencias, son los siguientes:

$$e_1 : \{C_2, C_1, C_3, C_5, C_6, C_4\} \; ; \; e_2 : \{C_1, C_4, C_2, C_3, C_6, C_5\}$$
$$e_3 : \{C_3, C_4, C_5, C_1, C_2, C_6\} \; ; \; e_4 : \{C_2, C_5, C_6, C_3, C_1, C_4\}$$
$$e_5 : \{C_2, C_3, C_4, C_1, C_6, C_5\} \; ; \; e_6 : \{C_1, C_2, C_3, C_5, C_6, C_4\}$$
$$e_7 : \{C_3, C_1, C_2, C_4, C_5, C_6\} \; ; \; e_8 : \{C_3, C_2, C_4, C_5, C_1, C_6\}$$

3. Las diferencias entre las posiciones de las alternativas (causas de mal comportamiento) en las soluciones individuales y la solución colectiva temporal están expresadas en la siguiente tabla:

	$V_1^c - V_1^i$	$V_2^c - V_2^i$	$V_3^c - V_3^i$	$V_4^c - V_4^i$	$V_5^c - V_5^i$	$V_6^c - V_6^i$
e_1	1	0	-1	-1	0	1
e_2	2	-2	-2	3	-2	1
e_3	-1	-4	1	3	1	0
e_4	-2	0	-2	-1	2	3
e_5	-1	0	0	2	-2	1
e_6	2	-1	-1	-1	0	-1
e_7	1	-2	1	1	-1	0
e_8	-2	-1	1	2	0	0

4. Los grados de consenso sobre las alternativas calculados para tres valores diferentes de b son:

	$C(C_1)$	$C(C_2)$	$C(C_3)$	$C(C_4)$	$C(C_5)$	$C(C_6)$
$b=1$	0.7	0.75	0.775	0.65	0.8	0.825
$b=1/2$	0.4602	0.6183	0.5624	0.4246	0.6510	0.6796
$b=1/3$	0.3392	0.5536	0.4503	0.3125	0.5775	0.6022

5. La medida de consenso calculada para los mismos tres valores de b es:

	C_X
$b=1$	0.75
$b=1/2$	0.566 + 0.052 β
$b=1/3$	0.4726 + 0.0811 β

Como se puede observar, existe una gran diferencia en los valores obtenidos cuando la función de disimilitud se aplica con diferentes valores de b. Si se hubiera prefijado un nivel de consenso mínimo de 0.75 entonces utilizando la función de disimilitud más sencilla, es decir $b=1$, el proceso de consenso debería finalizar en este momento con lo que la solución colectiva temporal sería la solución final de consenso. Sin embargo, una detenida observación de las soluciones individuales nos conduce a que existe gran discrepancia entre ellas por lo que no sería una decisión acertada la finalización en este momento del proceso de consenso, por que la solución colectiva no representa a la mayoría de las soluciones individuales. Para un valor de β de 0.8, los valores de consenso son 0.75, 0.61 y 0.54 respectivamente.

B. Medidas de proximidad

	$b=1$	$b=1/2$	$b=1/3$
	P_X^i	P_X^i	P_X^i
e_1	$0.87 + 0.13\beta$	$0.70 + 0.3\beta$	$0.61 + 0.39\beta$
e_2	0.6	0.37	$0.27 – 0.01\beta$
e_3	$0.67 – 0.47\beta$	$0.50 – 0.39\beta$	$0.41 – 0.34\beta$
e_4	$0.67 + 0.33\beta$	$0.48 + 0.52\beta$	$0.39 + 0.61\beta$
e_5	$0.8 + 0.2\beta$	$0.64 + 0.36\beta$	$0.56 + 0.44\beta$
e_6	0.8	$0.6 – 0.08\beta$	$0.49 – 0.07\beta$
e_7	$0.8 – 0.2\beta$	$0.6 – 0.23\beta$	$0.49 – 0.23\beta$
e_8	0.8	$0.64 – 0.09\beta$	$0.56 – 0.14\beta$

C. Proceso de retroalimentación

C.1. Clasificación de los profesores (expertos)

El orden de los profesores de acuerdo a la proximidad de sus soluciones individuales con respecto ala solución colectiva temporal es, para un valor β de 0.8, el mismo en cualesquiera de los tres casos:

$$e_1, e_5, e_4, e_8, e_6, e_7, e_2, e_3.$$

C.2. Cambio de opiniones

Llegados a este punto, cada profesor recibe su valor de proximidad y los valores de las diferencias de posiciones de las alternativas en las soluciones individual y colectiva. Es claro que los primeros profesores en modificar sus opiniones deberán ser los últimos en la anterior clasificación, lo que en nuestro caso significa que el primer profesor en realizar dicho cambio de opiniones debe ser el e_3. Tres de los ocho profesores fueron invitados a modificar sus preferencias siguiendo las tres reglas propuestas en la sección anterior. De esta forma, por ejemplo:

1. El segundo profesor debería incrementar su valuación sobre C_2 de acuerdo a la regla R.1.
2. De igual forma, este segundo profesor debería disminuir su valuación sobre C_4 de acuerdo a la regla R.3.
3. Por último, el tercer profesor no debería modificar su valuación sobre C_6 de acuerdo a la regla R.2.

Las nuevas preferencias de los últimos tres profesores en la anterior clasificación fueron:

$e_2 : O^2 = \{2,1,3,4,5,6\}$; $e_3 : U^3 = \{0.45,0.5,0.7,0.4,0.3,0.1\}$; $e_7 : P^7 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1/3 & 4 & 2 & 4 \\ 1/2 & 1 & 3 & 2 & 5 & 8 \\ 3 & 1/3 & 1 & 7 & 4 & 7 \\ 1/4 & 1/2 & 1/7 & 1 & 2 & 2 \\ 1/2 & 1/5 & 1/4 & 1/2 & 1 & 5 \\ 1/4 & 1/8 & 1/7 & 1/2 & 1/5 & 1 \end{bmatrix}$

Segunda etapa del proceso de consenso

A. Medida de consenso

1. Usando las correspondiente funciones de transformación para uniformar la información y usando el mismo cuantificador difuso *"la mayor parte de"* del primer paso, la relación de preferencia difusa colectiva es

$$P^c = \begin{bmatrix} 0.500 & 0.408 & 0.390 & 0.645 & 0.627 & 0.634 \\ 0.524 & 0.500 & 0.675 & 0.799 & 0.711 & 0.824 \\ 0.544 & 0.301 & 0.500 & 0.733 & 0.683 & 0.693 \\ 0.277 & 0.178 & 0.243 & 0.500 & 0.618 & 0.560 \\ 0.304 & 0.215 & 0.271 & 0.313 & 0.500 & 0.756 \\ 0.248 & 0.124 & 0.236 & 0.359 & 0.194 & 0.500 \end{bmatrix}.$$

Aplicando el proceso de explotación con el mismo cuantificador difuso *"la mayor cantidad de"* el grado de dominancia guiado por el cuantificador anterior al aplicarlo sobre la relación de preferencia colectiva proporciona los siguientes valores:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
$QGDD_i$	0433	0.566	0.448	0.229	0.263	0.185

Claramente, la causa que mayor influencia tiene el que un estudiante tenga un comportamiento incorrecto en el colegio, para este grupo de profesores, C_2, mientras que el orden colectivo de causas de mayor a menor influencia en el mal comportamiento de los estudiantes es $\{C_2, C_3, C_1, C_5, C_4, C_6\}$, la cual coincide con la anterior solución colectiva temporal.

2. Las soluciones individuales correspondientes a las tres nuevas preferencias son:

$$e_2 : \{C_2, C_1, C_3, C_4, C_5, C_6\} \ ; \ e_3 : \{C_3, C_2, C_1, C_4, C_5, C_6\} \ ; \ e_7 : \{C_3, C_1, C_2, C_5, C_4, C_6\}$$

3. Las diferencias entre las posiciones de las alternativas (causas de mal comportamiento) en las soluciones individuales y colectiva temporal son:

	$V_1^c - V_1^i$	$V_2^c - V_2^i$	$V_3^c - V_3^i$	$V_4^c - V_4^i$	$V_5^c - V_5^i$	$V_6^c - V_6^i$
e_1	1	0	-1	-1	0	1
e_2	1	0	-1	1	-1	0
e_3	0	-1	1	1	-1	0
e_4	-2	0	-2	-1	2	3
e_5	-1	0	0	2	-2	1
e_6	2	-1	-1	-1	0	-1
e_7	0	0	0	0	0	0
e_8	-2	-1	1	2	0	0

4. Los grados de consenso sobre las alternativas calculados para tres valores diferentes de b son:

	$C(C_1)$	$C(C_2)$	$C(C_3)$	$C(C_4)$	$C(C_5)$	$C(C_6)$
$b = 1$	0.775	0.925	0.825	0.775	0.85	0.85
$b = 1/2$	0.5951	0.8323	0.6414	0.5624	0.7301	0.7355
$b = 1/3$	0.5044	0.7807	0.5424	0.4503	0.6696	0.6753

5. La medida de consenso calculada para los mismos tres valores de b es:

	C_X
$b=1$	$0.8121 + 0.1129\,\beta$
$b=1/2$	$0.6828 + 0.1495\,\beta$
$b=1/3$	$0.6038 + 0.1769\,\beta$

En este caso, observamos que cinco del total de ocho profesores creen que la causa C_2 es la de mayor influencia en el mal comportamiento de los estudiantes, siendo este aspecto reflejado en el consenso sobre dicha alternativa pues está comprendido entre un mínimo de 0.78 a un máximo de 0.925. Sin embargo, si el nivel de consenso requerido lo fijamos en 0.75 entonces utilizando la función de disimilitud más sencilla, es decir $b=1$, el proceso de consenso debería finalizar en esta etapa por lo que la solución colectiva temporal sería la solución final de consenso, porque para un valor de β = 0.8, los valores de consenso total son 0.90242, 0.8024 y 0.74532 respectivamente, siendo este último valor tan próximo al nivel de consenso mínimo exigido 0.75 que no merecería la pena llevar a cabo una tercera etapa del proceso de consenso.

Como mencionamos anteriormente, en las primeras etapas del proceso de consenso, es decir cuando el nivel de consenso es bajo o cuando las opiniones de los expertos son muy distantes, la solución colectiva temporal puede ser diferente en diferentes etapas del proceso de consenso cuando las opiniones de los expertos son modificadas, mientras que si el nivel de consenso es alto en cuyo caso las opiniones de los expertos no son tan distantes, entonces este proceso de consenso converge en el sentido de que la solución temporal colectiva no se modifica de una etapa a otra. En nuestro ejemplo nosotros obtuvimos la misma solución colectiva temporal en ambas etapas, pero si el profesor e_3 hubiese proporcionado los valores de utilidad $\{0.55, 0.5, 0.6, 0.4, 0.3, 0.1\}$ en lugar de los proporcionados $\{0.45, 0.5, 0.7, 0.4, 0.3, 0.1\}$, entonces la solución colectiva temporal en la segunda etapa del proceso de consenso habría sido $\{C_2, C_1, C_3, C_5, C_4, C_6\}$, es decir habríamos obtenido una solución colectiva temporal distinta de la obtenida en la primera etapa.

Conclusiones

La resolución de un problema de TDME con diferentes estructuras de representación de preferencias conlleva fundamentalmente tres aspectos: (i) manejo de información no homogénea, (ii) el desarrollo de procesos de selección de alternativas, y (iii) el desarrollo de procesos de consenso adecuados. Atendiendo a estos aspectos, los resultados obtenidos en esta memoria pueden resumirse en los siguientes apartados.

1. Suponiendo problemas de TDME en los que la información disponible puede estar representada mediante una cualesquiera de las siguientes estructuras de preferencia: (i) órdenes de preferencia, (ii) funciones de utilidad, (iii) relaciones de preferencia multiplicativas y (iv) relaciones de preferencia difusas, el primer paso necesario para resolver tales problemas es el estudio de las relaciones existentes entre las distintas estructuras de representación de las preferencias. Como consecuencia de dicho estudio, hemos presentado funciones de transformación entre cada par de estructuras de representación de preferencias. Dichas funciones las utilizamos, mediante la elección de las relaciones de preferencia binarias como elemento base, para uniformar la información [13,14,15,17,18].

Hemos demostrado que dichas funciones de transformación son consistentes en el sentido de preservar el orden final de las alternativas establecidas por las diferentes estructuras de representación de preferencias [16,17,18], además de generalizar los procedimientos habitualmente utilizados en estos casos [14,15,17,18].

2. Para la fase de agregación del proceso de resolución de problemas de TDME cuando la información está representada mediante relaciones de preferencia multiplicativa

hemos definido un nuevo operador de agregación, el operador AGP, el cual se basa en el operador OWA de Yager y en el operador media geométrica no ponderada [17].

3. Se han definido dos grados de selección de alternativas, tanto para relaciones de preferencia difusas [13] como para relaciones de preferencia multiplicativas [17], pues suelen ser los elementos básicos utilizados para la representación uniforme de la información: (i) el grado de dominancia guiado por cuantificador, y (ii) el grado de no-dominancia guiado por cuantificador, el cual generaliza el concepto de no-dominancia de Orlovski. Hemos mostrado que bajo condiciones de consistencia de la información ambos grados proporcionan la misma ordenación de alternativas, independientemente del cuantificador utilizado para su cálculo [17]. Obviamente, cuando la información no es consistente entonces la aplicación de ambos grados de selección puede dar lugar a ordenaciones de alternativas diferentes.

4. Hemos presentado la arquitectura de un modelo de consenso para un problema de TDME basándonos para ello en dos tipos de medidas [29]**:** (a) una medida de consenso con la que se evalúa en la primera fase del proceso de consenso (expresión de información) el acuerdo existente entre todos los expertos y que utilizamos para guiar el proceso de consenso y validar la solución final del problema, y (b) una medida de proximidad con la que evaluamos el acuerdo (grado de coincidencia) entre las soluciones individuales de cada experto y la solución colectiva temporal. Se utiliza esta medida para guiar a los expertos en la segunda fase del proceso de consenso (discusión en grupo), es decir en la modificación de sus opiniones. Para esta fase, hemos propuesto reglas sencillas y simples con las que diseñar un mecanismo de realimentación el cual utilizamos como sustituto del moderador en la mencionada fase de discusión. En el futuro, nuestros esfuerzos van encaminados a estudiar diferentes mecanismos de realimentación para alcanzar consenso.

Para terminar, hacemos notar el gran número de campos en los que puede aplicarse el modelo de TDME presentado en la memoria. En general, cualquier situación en la que estén involucradas más de dos personas o criterios puede considerarse como potencialmente apta para la aplicación del modelo presentado en la memoria. En concreto puede aplicarse al estudio y resolución de problemas del entorno educativo, en todos sus niveles. Por ejemplo, en enseñanza secundaria puede aplicarse tanto para tomar decisiones consensuadas dentro de cada departamento como para tomar decisiones que afecten a todos los departamentos, es decir decisiones que han de tomarse dentro de la comisión de coordinación pedagógica de los centros de enseñanza secundaria, en el mismo claustro de profesores o en el consejo escolar de cada centro, etc.

Cabe decir, para terminar, que los modelos estudiados y presentados en esta memoria podrían extenderse a problemas en los que la información pueda ser de naturaleza cualitativa, por lo que quedaría como tema abierto para futuras investigaciones por nuestra parte, junto con el de profundizar en el estudio de los modelos de consenso y negociación en entornos educativos.

Bibliografía

[1] J. Aczél, *Lectures on Functional Equations and Their Applications* (Academic Press, New York, London, 1966).

[2] K. J. Arrow, *Social Choice and Individual Values* (Wiley, New York, 1951, 1964).

[3] K. J. Arrow, H. Raynaud, *Opciones Sociales y Toma de Decisiones mediante Criterios Múltiples* (Alianza Editorial, Madrid, S.A.,1989)

[4] R. Belman, M. Giertz, On The Analytic Formalism of The Theory of Fuzzy Sets, *Information Science,* **5** (1973) 149-156.

[5] J. M. Blin, Fuzzy Relations in Group Decision Theory, *Journal of Cybernetics*, **4** (1974) 17-22.

[6] J. M. Blin, A.P. Whinston, Fuzzy Sets and Social Choice, *Journal of Cybernetics*, **3** (1974) 28-36.

[7] P. P. Bonissone, K.S. Decker, Selecting Uncertainty Calculi and Granularity: An Experiment in Trading-off and Complexity. In: Kanal, Lemmer, Eds., *Uncertainty in Artificial Intelligence* (North-Holland, 1986) 217-247.

[8] G. Bordogna, M. Fedrizzi, G. Pasi, A Linguistic Modelling of Consensus in Group Decision Making Based on OWA Operators, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, Vol. **27** (1997) 126-132.

[9] N. Bryson, Group Decision-Making and the Analytic Hierarchy Process: Exploring the Consensus-Relevant Information Content, *Computers and Operations Research, Vol.* **23** No. **1** (1996) 27-35

[10] C. Carlsson, D. Ehrenberg, P. Eklund, M. Fedrizzi, P. Gustafsson, P. Lindholm, G. Merkuryeva, T. Riissanen, A.G.S. Ventre, Consensus in Distributed Soft Environments, *European Journal of Operational Research, Vol.* **61** (1992)165-185.

[11] L. Cohen, L. Manion, K. Morrison, *A Guide to Teaching Practice* (Routledge, London, 1996).

[12] S.-J. Chen, C.-L. Hwang, *Fuzzy Multiple Attributive Decision Making: Theory and its Applications* (Springer, Berlin, 1992).

[13] F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, M.C. Poyatos, A Classification Method of Alternatives for Preference Ordering Criteria Based on Fuzzy Majority, *The Journal of Fuzzy Mathematics, Vol.* **4**, No. **4** (1996) 801-813.

[14] F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, Preference Relations as The Information Representation Base in Multi-Person Decision Making, *Proc. of 6th Int. Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-based Systems*, Granada, (1996) 459-464.

[15] F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, Integrating Three Representation Models in Fuzzy Multipurpose Decision Making Based on Fuzzy Preference Relations, *Fuzzy Sets and Systems*, **97** (1998) 33-48.

[16] F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, On the Consistency of a General Multipurpose Decision Making Model Integrating Different Preference Structures, *Technical Report Dept. of Computer Science and A.I.,* University of Granada (1998).

[17] F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, Integrating Multiplicative Preference Relations in a Multipurpose Decision Making Model Based on Fuzzy Preference Relations, *Fuzzy Sets and Systems.* Por aparecer.

[18] F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, Multiperson Decision Making Based on Multiplicative Preference Relations, *European Journal of Operational Research.* Por aparecer.

[19] J. Dombi, A General Framework for the Utility-Based and Outranking Methods. In: B.B. Bouchon et al. (Eds.), *Fuzzy Logic and Soft Computing* (World Scientific, London, 1995), 202-208.

[20] D. Dubois, H. Prade, A Review of Fuzzy Sets Aggregation Connectives, *Information Sciences,* **36** (1985) 85-121.

[21] D. Dubois, J.-L. Koning, Social Choice Axioms for Fuzzy Sets Aggregation, *Fuzzy Sets and Systems,* **43** (1991) 257-274.

[22] M. Fedrizzi, On a Consensus Measure in a Group MCDM Problem, in: J. Kacprzyk, M. Fedrizzy, Eds., *Multiperson Decision Making Using Fuzzy Sets and Possibility Theory,* (Kluwer Academic Publishers, 1990) 231-241.

[23] J. Fodor, M. Roubens, *Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support* (Kluwer, Dordrecht, 1994).

[24] J. A. Goguen, The Logic of Inexact Concepts, *Synthese,* **19** (1969) 325-373.

[25] J. A. Goguen, L-Fuzzy Sets, *JMAA,* **18** (1967) 145-174.

[26] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, J.L. Verdegay, A Sequential Selection Process in Group Decision Making with a Linguistic Assessment Approach, *Information Sciences,* **85** (1995) 223-239.

[27] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, J.L. Verdegay, A Model of Consensus in Group Decision Making Under Linguistic Assessment, *Fuzzy Sets and Systems,* **78** (1996) 73-87.

[28] E. Herrera-Viedma, Modelos Lingüísticos para la Toma de Decisiones en Grupo, *Tesis Doctoral,* Granada, Abril, 1996.

[29] E. Herrera-Viedma, F. Herrera, F. Chiclana, A Consensus Model for Multiperson Decision Making with Different Preference Structures, *Technical Report Dept. of Computer Science and A.I.,* University of Granada (1999).

[30] J. Kacprzyk, Group Decision Making with a Fuzzy Linguistic Majority, *Fuzzy Sets and Systems*, **18** (1986) 105-118.

[31] J. Kacprzyk, On Some Fuzzy Cores and "Soft" Consensus Measures in Group Decision Making, in: J. Bezdek, Ed., Th*e Analysis of Fuzzy Information* (CRC Press, 1987) 119-130.

[32] J. Kacprzyk, M. Roubens, *Non-Conventional Preference Relations in Decision Making* (Springer-Verlag, 1988).

[33] J. Kacprzyk, M. Fedrizzi, A "Soft" Measure of Consensus in the Setting of Partial (Fuzzy) Preferences, *European Journal of Operational Research,* **34** (1988) 316-325.

[34] J. Kacprzyk, M. Fedrizzi, *Multiperson Decision Making Models Using Fuzzy Sets and Possibility Theory* (Kluwer Academic Pub., Dordrecht, 1990).

[35] J. Kacprzyk, M. Fedrizzi, H. Nurmi, Group Decision Making and Consensus Under Fuzzy Preference and Fuzzy Majority, *Fuzzy Sets and Systems*, **49** (1992) 21-31.

[36] J. Kacprzyk, H. Nurmi, M. Fedrizzi, Eds., *Consensus Under Fuzziness* (Kluwer Academic Publishers, Boston, 1997).

[37] W. J. M. Kickert, *Fuzzy Theories on Decision Making* (Nijhoff, Leiden, 1987).

[38] L. Kitainick, *Fuzzy Decision Procedures with Binary Relations, Towards an Unified Theory* (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993).

[39] L. Kitanik, *Fuzzy Decision Procedures with Binary Relations* (Kluwer Academic Publishers, 1995).

[40] P. Korhonen, H. Moskowitz, J. Wallenius, Multiple Criteria Decision Support- A Review, *European Journal of Operational Research*, **63** (1992) 361-375.

[41] L. I. Kuncheva, Five Measures of Consensus in Group Decision Making Using Fuzzy Sets, *Proc. of Fourth International Fuzzy Systems Association World Congress* , 1991, 141-144.

[42] L. I. Kuncheva, R. Krishnapuram, A Fuzzy Consensus Aggregation Operator, *Fuzzy Sets and Systems*, **79** (1996) 347-356.

[43] R.D. Luce, P. Suppes, Preferences, Utility and Subject Probability. In: R.D. Luce et al., Eds., *Handbook of Mathematical Psychology, Vol. III*, (Wiley, New York, 1965) 249-410.

[44] G. A. Miller, The Magical Number Seven or Minus Two: Some Limits on Our Capacity of Processing Information, *Psychological Rev.*, **63** (1956) 81-97.

[45] L. Mich, L. Gaio, M. Fedrizzi, On Fuzzy Logic-Based Consensus in Group Decision, *Proc. of Fifth International Fuzzy Systems Association World Congress* (1993) 698-700.

[46] Y. Nishizaki, F. Seo, Interactive Support for Fuzzy Trade-off Evaluation in Group Decision Making, *Fuzzy Sets and Systems*, **68** (1994) 309-325.

[47] H. Nurmi, Approaches to Collective Decision Making with Fuzzy Preference Relations, *Fuzzy Sets and Systems*, **6** (1981) 249-259.

[48] H. Nurmi, Assumptions of Individual Preferences in the Theory of Voting Procedures, In: J. Kacprzyk and M. Roubens, Eds., *Non-conventional Preference Relations in Decision Making* (Springer-Verlag, Berlin-New York, 1988) 142-155.

[49] H. Nurmi, J. Kacprzyk, On Fuzzy Tournaments and Their Solution Concept in Group Decision Making, *European Journal of Operational Research,* **51** (1991) 223-232.

[50] S. A. Orlovsky, Decision-Making with a Fuzzy Preference Relation, *Fuzzy Sets and Systems,* **1** (1978) 155-167.

[51] S.A. Orlovsky, *Calculus of Decomposable Properties, Fuzzy Sets and Decisions* (Allerton Press, 1994).

[52] N. Rescher, *Multi-Valued Logic*, (McGraw-Hill, New York, 1969).

[53] M. Roubens, Fuzzy Sets and Decision Analysis, *Fuzzy Sets and Systems*, **90** (1997) 199-206.

[54] Th. L. Saaty, Exploring the Interface Between Hierarchies, Multiple Objectives and Fuzzy Sets, *Fuzzy Sets and Systems*, **1** (1978) 57-68.

[55] Th. L. Saaty, *The Analytic Hierarchy Process* (McGraw-Hill, New York, 1980).

[56] Th. L. Saaty, *Fundamentals of Decision Making and Priority Theory with the Analytic Hierarchy Process*, (RSW Publications, Pittsburgh, 1994).

[57] F. Seo, M. Sakawa, Fuzzy Multiattribute Utility Analysis for Collective Choice, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cyber.,* Vol. **15**, No. **1** (1985) 45-53.

[58] T. Tanino, Fuzzy Preference Orderings in Group Decision Making, *Fuzzy Sets and Systems,* **12** (1984) 117-131.

[59] T. Tanino, Fuzzy Preference Relations in Group Decision Making. In: J. Kacprzyk, M. Roubens (Eds.), *Non-Conventional Preference Relations in Decision Making* (Springer-Verlag, Berlin, 1988) 54-71.

[60] T. Tanino, On Group Decision Making Under Fuzzy Preferences. In: J. Kacprzyk, M. Fedrizzi (Eds.), *Multiperson Decision Making Using Fuzzy Sets and Possibility Theory* (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990) 172-185.

[61] Ph. Vincke, *Multicriteria Decision-Aid*, (John Wiley & Sons, New York, 1992).

[62] M. Weber, K. Borcherding, Behavioural Influences on Weights Judgements in Multiattribute Decision Making, *European Journal of Operational Research,* **67** (1993) 1-12.

[63] R.R. Yager, On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multicriteria Decision Making, *IEEE Transaction on Systems, Man and Cybernetics,* **18** (1988) 183-190.

[64] R.R. Yager, Connectives and Quantifiers in Fuzzy Sets, *Fuzzy Sets and Systems,* **40** (1991) 39-75.

[65] R.R. Yager, Families of OWA Operators, *Fuzzy Sets and Systems*, **59** (1993) 125-148.

[66] R.R. Yager, Interpreting Linguistically Quantified Propositions, *International Journal of Intelligent Systems*, **9** (1994) 541-569.

[67] R.R. Yager, D.P. Filev, Parameterized And-Like and Or-Like OWA Operators, *International Journal of General Systems, Vol.* **22** (1994) 297-316.

[68] L. A. Zadeh, Fuzzy Sets, *Information and Control,* **8** (1965) 338-353.

[69] L. A. Zadeh, The Concept of a Linguistic Variable and Its Applications to Approximate Reasoning. Part I, *Information Science,* **8** (1975) 199-249, Part II, *Information Science,* **8** (1975) 301-357, Part III, *Information Science,* **9** (1975) 43-80.

[70] L. A. Zadeh, A Computational Approach to Fuzzy Quantifiers in Natural Languages, *Computers and Mathematics with Applications*, **9** (1983) 149-184.

[71] S. Zadrozny, An Approach to the Consensus Reaching Support in Fuzzy Environment, In: J. Kacprzyk, H. Nurmi, M. Fedrizzi, Eds., *Consensus under Fuzziness*, (Kluwer Academic Publishers, Massachusetts, 1997) 83-109.

[72] H.-J. Zimmermann, Multi Criteria Decision Making in Crisp and Fuzzy Environments. In: A. Jones et al., Eds., *Fuzzy Sets Theory and Applications*, (D. Reidel Publishing Company, 1986) 233-256.

[73] H.-J. Zimmermann, *Fuzzy Set Theory and Its Applications* (Kluwer, Dordrecht, 1991).

[74] H.-J. Zimmermann, P. Zysno, Latent Connectives in Human Decision Making, *Fuzzy Sets and Systems,* **4** (1980) 37-51.