MODELOS LINGÜISTICOS PARA LA TOMA DE DECISIONES EN GRUPO

MEMORIA QUE PRESENTA

ENRIQUE HERRERA VIEDMA

PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR EN INFORMATICA

ABRIL 1996

DIRECTORES

FRANCISCO HERRERA TRIGUERO
JOSE LUIS VERDEGAY GALDEANO

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACION
E INTELIGENCIA ARTIFICIAL

E.T.S. de INGENIERIA INFORMATICA UNIVERSIDAD DE GRANADA

Indice

Introducción

A. Planteamiento

En multitud de ocasiones la solución de un problema real depende de varias fuentes de información. Por ello, el estudio de métodos de agregación de información es un área de investigación esencial en muchas ciencias (Biología, Teoría de Decisión, Inteligencia Artificial, etc,.). En esencia, toda técnica de agregación trata de combinar los datos suministrados del modo más beneficioso, de forma que de la información final elaborada se pueda extraer la mayor cantidad de conocimiento posible.

Puesto que la información de la que disponemos en muchos casos es vaga e imprecisa, la agregación de este tipo de información es necesaria. En esta memoria, estudiamos este aspecto en problemas de Toma de Decisiones en los cuales se usa las técnicas aportadas por la Teoría de Conjuntos Difusos para modelar la información incierta. Algunos estudios sobre este problema se pueden encontrar en [12, 13, 15, 21, 22, 26, 29, 61, 66, 81, 84, 86, 91].

Los problemas de Toma de Decisiones con Múltiples Personas son un claro ejemplo de situaciones donde la agregación de información juega un papel fundamental. Estos problemas se definen como situaciones de toma de decisiones donde hay dos o más personas que en función de sus preferencias, intentan adoptar una decisión final.

En la literatura, desde la Teoría de Conjuntos Difusos son diversos los estudios que se aportan sobre este tema [29, 51, 52, 53, 54, 97]. En general, las personas expresan sus preferencias mediante conjuntos de selección difusos, o funciones de utilidad difusas, o relaciones de preferencia difusas [73].

En esta memoria, nos centramos en los problemas de Toma de Decisiones con Múltiples Personas en los que se asumen relaciones de preferencia difusas para expresar las opiniones de las personas, conocidos con el nombre de problemas de Toma de Decisiones en Grupo

(TDG) [5, 6, 12, 47, 48, 62, 72].

En general, un problema de TDG se establece en situaciones donde hay una cuestión común a solucionar, un conjunto de opciones posibles a escoger y, un conjunto de individuos (expertos, jueces,...) que expresan sus opiniones o preferencias sobre el conjunto de opciones posibles, y que tienen la intención de alcanzar una decisión colectiva sobre la solución que resuelva la cuestión [9].

En los problemas de TDG son dos los procesos a desarrollar antes de obtener una solución [10]: proceso de consenso y proceso de selección. El primero, hace referencia a cómo alcanzar el máximo grado de consenso o acuerdo entre los individuos sobre el conjunto de alternativa(s) solución. El segundo, hace referencia a cómo obtener el conjunto de alternativa(s) solución a partir de los opiniones expresadas por los individuos. Ambos procesos actúan conjuntamente de forma secuencial. Primero, el proceso de consenso actúa para lograr alcanzar el máximo grado de consenso posible entre las opiniones de los individuos. En cada momento se calcula el grado de consenso existente. Si el grado es satisfactorio, entonces el proceso de selección se aplica de cara a obtener la solución. Por contra, si el grado de consenso medido no es satisfactorio, entonces los individuos son instados a cambiar sus opiniones de cara a aumentar la proximidad en sus planteamientos. De este modo, un proceso de TDG se puede definir como un proceso dinámico e iterativo en el que los individuos van cambiando sus opiniones hasta que sus planteamientos sobre la solución son lo suficientemente próximos, momento en el que se obtiene la solución de consenso mediante la aplicación del proceso de selección.

Problema de TDG en Contexto Difuso

Un modelo difuso común de un problema de TDG supone la existencia de un conjunto finito de alternativas $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ $(n \geq 2)$, sobre el que decide un conjunto finito de individuos $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$ $(m \geq 2)$. Además, se asume que cada individuo, $e_k \in E$, expresa sus opiniones sobre X mediante una relación de preferencia difusa, $P^k \subset X\mathrm{x}X$, con función de pertenencia

$$\mu_{P^k} : X\mathrm{x}X \rightarrow [0, 1],$$

siendo $\mu_{P^k}(x_i, x_j) = p^k_{ij}$ el grado de preferencia de la alternativa x_i sobre la x_j, expresado por el individuo e_k. A veces, el modelo puede complicarse admitiendo que no todos los individuos tienen igual importancia, es decir, se supone la existencia de un moderador, el cual asigna unos pesos, llamados grados de importancia, al conjunto de individuos E. Estos grados de importancia pueden definirse como un subconjunto difuso sobre E, caracterizado por una función de pertenencia, μ_E, definida como

$$\mu_E : E \to [0,1],$$

siendo $\mu_E(k)$, el grado de importancia de las preferencias del individuo e_k. Si $\mu_E(1) = \mu_E(2) = \ldots = \mu_E(m)$ estamos ante problemas de TDG homogéneos, y si no, ante problemas de TDG heterogéneos. De igual modo, el modelo puede complicarse aún más, si se admite que no todas las alternativas tienen igual relevancia, es decir, el moderador puede asignar unos pesos, llamados grados de relevancia, al conjunto de alternativas X. Estos grados de relevancia pueden definirse como un subconjunto difuso sobre X, caracterizado por una función de pertenencia, μ_R, definida como

$$\mu_R : X \to [0,1],$$

siendo $\mu_R(i)$ el grado de relevancia de la alternativa x_i dentro del problema planteado.

Problema de TDG en Contexto Lingüístico

Normalmente, se asume que los individuos que participan en un problema de TDG son perfectamente capaces de expresar sus preferencias sobre las alternativas mediante valores numéricos exactos. Sin embargo, en multitud de situaciones reales, es evidente que un individuo tiene serias dudas sobre cómo estimar con un valor numérico exacto su grado de preferencia de una alternativa x_i sobre otra x_j. En estas circunstancias, una aproximación más realista consiste en expresar sus preferencias por medio de valores lingüísticos en lugar de valores numéricos exactos, suponiendo que el dominio de las variables que intervienen en el problema es un conjunto de términos lingüísticos [21, 22, 74, 55, 83, 94]. Esta forma de abordar un problema de TDG es una técnica basada en la Teoría de Conjuntos Difusos, que recibe el nombre de enfoque lingüístico, y se aplica cuando las variables que intervienen en un problema son de carácter lingüístico en vez de numérico [94]. Con ello, se consigue modelar de forma más directa y apropiada gran cantidad de problemas reales, ya que nos permite representar la información de los individuos (casi siempre poco precisa) de manera muy aproximada a como ellos la expresan inicialmente.

Un modelo lingüístico de un problema de TDG asume la existencia de un conjunto apropiado de etiquetas, S, para expresar las preferencias de los individuos. Así pues, se considera que los individuos expresan sus opiniones sobre X mediante una relación de preferencia lingüística, $P^k \subset X\text{x}X$, con función de pertenencia,

$$\mu_{P^k} : X\text{x}X \rightarrow S,$$

siendo p_{ij}^k el grado de preferencia de la alternativa x_i sobre la x_j, expresado lingüísticamente por el individuo e_k. Además, si se admiten grupos heterogéneos de individuos o conjuntos heterogéneos de alternativas, se puede dar la libertad al moderador para que también exprese los grados de importancia y relevancia con valores lingüísticos de S o de otro conjunto con iguales características. De este modo, los problemas reales de TDG se modelizan de forma más natural.

Así pues, admitiendo que muchos problemas de TDG cotidianos pueden representarse mediante un modelo lingüístico, el problema que se afronta en esta memoria es el de intentar dar solución a esos modelos lingüísticos de TDG, de la manera más parecida a como se hace en la vida real, con vistas a crear modelos suficientemente consistentes y coherentes con las situaciones reales, sobre los que poder desarrollar Sistemas Inteligentes de Ayuda a la Toma de Decisiones en Grupo.

B. Objetivos

En la resolución de un problema de TDG, como hemos comentado, intervienen dos procesos: proceso de consenso y proceso de selección. Para la realización de los mismos es fundamental el uso de operadores adecuados de agregación de información. Por ello, asumiendo que trabajamos en un contexto lingüístico, los objetivos centrales de esta memoria son los siguientes:

- El diseño de operadores de agregación de información lingüística.
- El diseño de modelos de consenso lingüísticos para los problemas de TDG en contexto lingüístico.
- El diseño de modelos de selección lingüísticos para los problemas de TDG en contexto lingüístico.

En resumen, el objetivo principal de esta memoria es el desarrollo de modelos de TDG con información lingüística, donde se usan etiquetas lingüísticas para expresar las opiniones de los individuos, relaciones de preferencia lingüísticas para representar esas opiniones, cuantificadores difusos lingüísticos para representar la idea de mayoría difusa, y varios operadores de agregación de información lingüística.

C. Resumen

Los objetivos planteados se alcanzan a lo largo de esta memoria como sigue:

En el capítulo primero se introduce el problema de TDG en contexto difuso, se estudia el uso de las relaciones de preferencia difusas en la representación de las opiniones, se caracteriza el tipo de conjunto de etiquetas lingüísticas que se usa para expresar las opiniones, se presenta el problema de TDG en contexto lingüístico, se presentan algunos de los tipos de relaciones de preferencia lingüísticas, y se definen los distintos modelos de TDG en contexto lingüístico que vamos a usar en los desarrollos de la memoria, tanto para grupos homogéneos como heterogéneos.

En el capítulo segundo se aborda el problema del diseño de operadores de agregación de información lingüística. Para ello, se estudia el concepto de mayoría difusa y se analiza la forma de representarlo mediante cuantificadores difusos lingüísticos [96], con la idea de diseñar operadores de agregación guiados por mayoría difusa [81, 85, 91]. Dado que en los problemas de TDG, unas veces podemos tener información lingüística no ponderada, y otras ponderada, se estudian por separado los problemas de agregación de información lingüística no ponderada y ponderada. Para el primero, se proponen dos operadores: (i) el operador LOWA presentado en [32] se estudia en profundidad, y (ii) el operador I-LOWA se presenta como una extensión del operador LOWA. Para la agregación de información lingüística ponderada se proponen tres operadores: (i) el operador disyuntivo DLP, (ii) el operador conjuntivo CLP y (iii) el operador promedio PLP. En todos los casos, la presentación de los operadores se completa con un estudio de su axiomática y de sus propiedades.

En el capítulo tercero se enfoca el problema del diseño de los modelos de consenso lingüísticos para problemas de TDG en contexto lingüístico, en base al operador LOWA. Para ello, se propone una nueva arquitectura de consenso en problemas de TDG basada en dos tipos de medidas de consenso lingüísticas: grados de consenso lingüístico y proximidades lingüísticas. Estas medidas se obtienen en tres niveles de opinión: nivel de los pares de alternativas, nivel de las alternativas, y nivel de la relación. En base a esta arquitectura, se presentan tres modelos lingüísticos para alcanzar el consenso en grupo: (i) un modelo de consenso lingüístico guiado por medidas de consenso promedio, basado en una política de coincidencia promedio, (ii) un modelo de consenso lingüístico guiado por medidas de consenso maximales, basado en una política de coincidencia maximal, y (iii) un modelo de consenso lingüístico guiado por medidas de consenso basadas en coincidencia difusa, (en este caso, previamente se caracteriza el concepto de coincidencia difusa en los tres niveles de opinión). Finalmente, con objeto de lograr modelos de consenso mucho más consistentes, que permitan ayudar a la detección y eliminación de las inconsistencias que los individuos puedan presentar en sus opiniones, se propone la arquitectura de un modelo de consenso racional guiado por dos tipos de medidas: (i) medidas de consenso lingüísticas y (ii) medidas de consistencia lingüísticas. En base a esta arquitectura, se diseña un modelo de consenso lingüístico racional guiado por las mismas medidas de consenso, y por dos tipos de medidas de consistencia lingüísticas: (i) individuales y (ii) colectivas. Estas medidas de consistencia se obtienen a partir de los conjuntos de ciclos de preferencia inconsistentes positivos de tres alternativas diferentes detectados en las relaciones de preferencia lingüísticas. Ellas se definen en función de un análisis cualitativo y cuantitativo de estos conjuntos de ciclos.

En el capítulo cuarto se estudia el problema del diseño de modelos de selección lingüísticos para problemas de TDG en contexto lingüístico, en base al operador LOWA y a los operadores de agregación de información lingüística ponderada, DLP, CLP y PLP. Para ello, se presentan tres grados de selección de alternativas lingüísticos que caracterizan a las alternativas y permiten obtener una clasificación de las mismas: (i) el grado de dominancia lingüístico guiado por cuantificador, (ii) el grado de no dominancia lingüístico en el sentido de Orlovski [63], y (iii) el grado de no dominancia lingüístico guiado por cuantificador. Estos grados, dependiendo de como se obtengan, pueden ser de tres tipos: (i) individuales, (ii) colectivos, y (iii) sociales. Dado que hay dos posibilidades de obtener el conjunto de alternativas solución, una directa y otra indirecta, se proponen varios modelos de selección lingüísticos directos y varios indirectos en base a los grados de selección de alternativas definidos. Concretamente, se proponen cuatro modelos directos y cuatro indirectos. En ambos casos, hay dos modelos guiados por dominancia, para problemas de TDG homogéneos y heterogéneos, respectivamente. De igual modo, hay dos modelos guiados por no dominancia en cada caso. Finalmente, para completar este capítulo se presentan dos modelos de selección lingüísticos combinados guiados por dominancia y no dominancia, al mismo tiempo: (i) un modelo de selección conjuntivo, y (ii) un modelo de selección secuencial. Ambos son idóneos cuando el conjunto de alternativas solución que se obtiene aplicando uno de los modelos simples, directo o indirecto, no es lo suficientemente específico.

Finalmente, se resumen las principales conclusiones, así como los desarrollos futuros que pensamos realizar.

Capítulo 1

La Toma de Decisiones en Grupo: Enfoque Lingüístico

Este capítulo está dedicado a la presentación del problema que trata la memoria y que motiva todas las aportaciones que hay en las misma: el problema de Toma de Decisiones en Grupo (TDG) en contexto lingüístico. Primero se aborda la definición del problema de TDG en un contexto real, analizando sus elementos y problemática. A continuación, se presenta el modelo tradicional difuso del mismo, destacando el uso de relaciones de preferencia difusas, evaluadas en dominio numérico, para expresar las opiniones de los individuos. Y, finalmente, se presenta el modelo lingüístico del problema de TDG que vamos a considerar, haciendo especial hincapié en tres aspectos:

- Determinación del conjunto de etiquetas a usar por los individuos para expresar sus preferencias.

- El uso de relaciones de preferencia lingüísticas, en lugar de numéricas, para representar las preferencias de los individuos.

- Presentación de los diferentes modelos lingüísticos del problema que vamos a considerar en los desarrollos de la memoria.

1.1 La Toma de Decisiones en Grupo

En un sentido amplio, tomar una decisión es seleccionar la mejor opción de entre un conjunto de opciones posibles. Muchas de las actividades humanas precisan en algún instante tomar decisiones. Por ello, no es sorprendente que el estudio de modelos de toma de decisiones tenga un papel muy destacado no sólo en la Teoría de Decisión, sino también en otras áreas de investigación como la Inteligencia Artificial, Economía, Sociología, Ingeniería, etc..

Normalmente, los modelos de toma de decisiones básicos teóricos tienen poco en común con la toma de decisiones real. Muchos procesos reales de toma de decisiones se desarrollan en actividades donde los objetivos, las restricciones y las acciones a elegir no son del todo conocidas con exactitud. Entonces, la cuestión es cómo se puede modelar esa incertidumbre. Una forma potente y práctica de manejar la incertidumbre del conocimiento humano la proporciona la Teoría de Conjuntos Difusos, propuesta por el Prof. Zadeh en 1965 [93]. La aplicación de la Teoría de Conjuntos Difusos para solucionar el problema de falta de información en la toma de decisiones fue propuesta por Bellman y Zadeh en 1970 [3], y desde entonces ha demostrado ser muy útil. En [18] podemos encontrar un breve análisis histórico de los modelos de toma de decisiones planteados, siendo los más recientes aquellos basados en el uso de la Teoría de Conjuntos Difusos para modelar el manejo de incertidumbre. Su principal cualidad es la de presentar un entorno de trabajo mucho más flexible, donde es posible representar la imprecisión, tanto cualitativa como cuantitativa, de los juicios humanos, permitiendo de este modo solucionar satisfactoriamente muchos de los problemas derivados de las pérdidas de información.

En la literatura, diferentes modelos de toma de decisiones difusos se han propuesto. Una clasificación de los mismos, dependiendo del número de pasos antes de tomar las decisiones y del número de personas implicadas, se puede encontrar en [53]. Aquí, estamos interesados en un modelo de toma de decisiones difuso con varias personas, denominado, modelo de TDG.

Un problema de TDG se establece en situaciones donde hay una cuestión común a solucionar, un conjunto de opciones posibles a escoger y, un conjunto de individuos (ex-

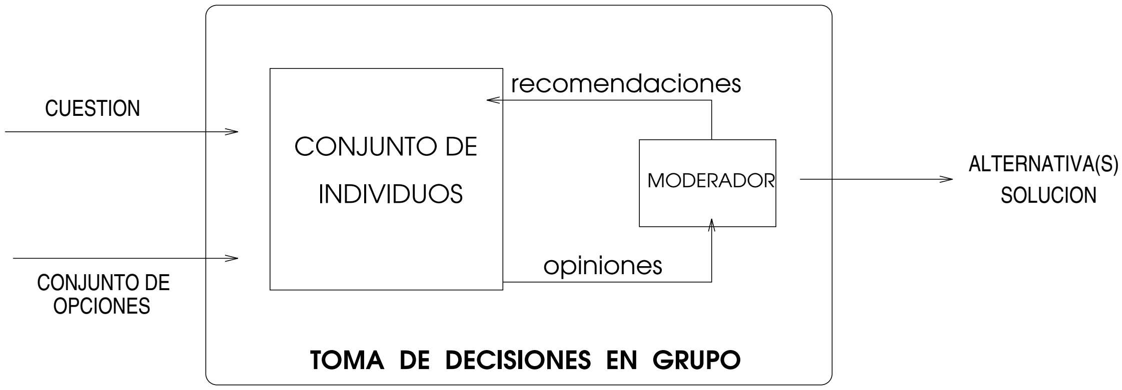

Figura 1.1. Planteamiento del Problema de TDG

pertos, jueces,...) que expresan sus opiniones o preferencias sobre el conjunto de opciones posibles, y que tienen la intención de alcanzar una decisión, de forma colectiva, sobre la solución que resuelva la cuestión planteada. A veces, existe una persona singular, llamada moderador, encargada de dirigir todo el proceso de resolución del problema de TDG hasta que los individuos logran un acuerdo sobre la solución a escoger (ver figura 1.1).

En los problemas de TDG son dos los procesos a desarrollar antes de obtener una solución [10]: proceso de consenso y proceso de selección. Ambos han sido objeto de estudio por diversos autores en diferentes contextos de TDG [29, 51, 52, 53]. El primero, conocido también con el nombre de consenso topológico, hace referencia a cómo alcanzar el máximo grado de consenso o acuerdo entre los individuos sobre el conjunto de alternativa(s) solución. El segundo, conocido también con el nombre de consenso algebraico, hace referencia a cómo obtener el conjunto de alternativa(s) solución a partir de los opiniones expresadas por los individuos. Ambos procesos actúan conjuntamente de forma secuencial. Primero, el proceso de consenso actúa para lograr alcanzar el máximo grado de consenso posible entre las opiniones de los individuos. En cada momento se calcula el grado de consenso existente. Si el grado es satisfactorio, entonces el proceso de selección se aplica de cara a obtener la solución. Por contra, si el grado de consenso medido no es satisfactorio, entonces los individuos son instados a modificar sus opiniones de cara a aumentar la proximidad en sus planteamientos. De este modo, un proceso de TDG se puede definir como un proceso dinámico e iterativo en el que los individuos van cambiando sus opiniones hasta que sus planteamientos sobre la solución son lo suficientemente próximos, momento en el que se obtiene la solución de consenso mediante la aplicación del proceso de selección. Esto, gráficamente, puede ser observado en la figura 1.2.

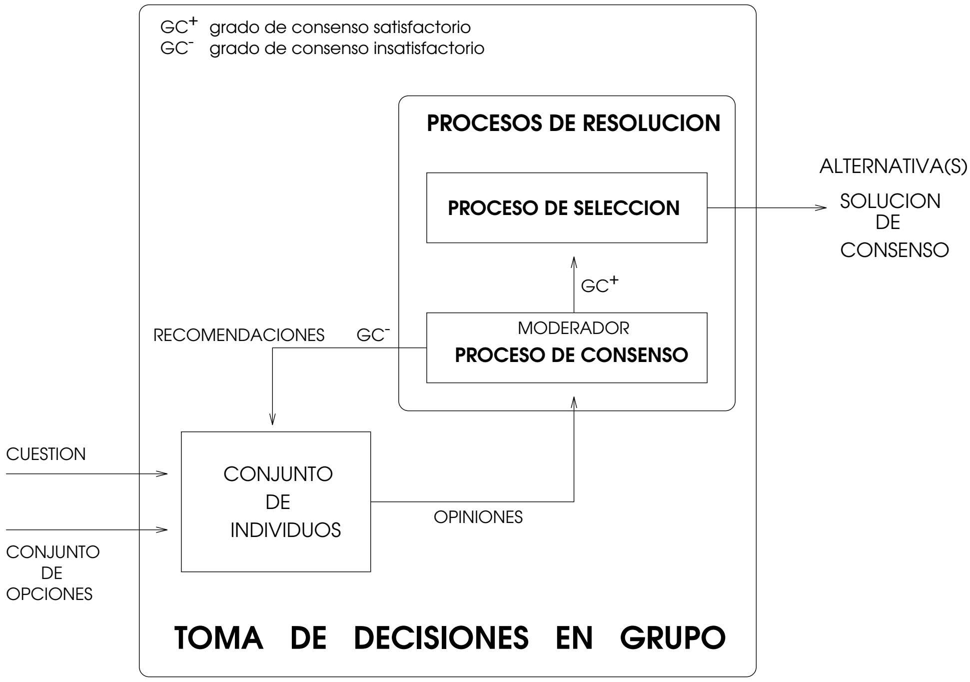

Figura 1.2. Esquema del Proceso de TDG

Cuando las opiniones de los individuos no se consideran con igual intensidad o valor, es decir, no tienen igual importancia, estamos ante un problema de TDG heterogéneo, y en caso contrario, ante un problema de TDG homogéneo. Un modo de recoger este aspecto, consiste en asignar un peso a cada individuo. Los pesos son valores cualitativos o cuantitativos que pueden ser asignados, por ejemplo, por el moderador. Pueden interpretarse como la importancia del individuo dentro del grupo, o como lo pertinente que realmente es el individuo en relación al problema tratado [25, 26]. En cualquier caso, es conveniente apreciar que este peso ha de actuar como una restricción sobre las opiniones de los individuos en el proceso de resolución. En algunas situaciones, estos problemas pueden ser complicados aún más, considerando que tenemos opciones con distinta relevancia de cara al dominio de aplicación del problema de TDG.

1.2 Planteamiento de un Problema de TDG Difuso

1.2.1 Representación de las Preferencias: Relaciones de Preferencia Difusas

Una cuestión muy importante a deteminar en un problema de TDG es cómo representar las opiniones o preferencias de los individuos. En la mayoría de las ocasiones, los individuos no presentan preferencias bien definidas o precisas en sentido crisp. Todo lo contrario, suelen tener una idea poco clara o exacta, es decir, presentan preferencias u opiniones difusas. Asumiendo un conjunto finito de alternativas $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ $(n \geq 2)$, de acuerdo con Tanino [72, 73], las preferencias difusas pueden ser representadas así:

1. *Un conjunto de selección difuso.* Las preferencias de un individuo sobre el conjunto de alternativas, X, se describen mediante un subconjunto difuso de X, caracterizado por una función de pertenencia, $\mu : X \longrightarrow [0,1]$, cuyo valor $\mu(x_i)$ indica el grado de preferencia de la alternativa x_i, o el grado en el cual esa alternativa elegida es una alternativa conveniente.

2. *Una función de utilidad difusa.* Las preferencias de un individuo sobre el conjunto de alternativas, X, se describen mediante una función difusa, ν, que asocia un subconjunto difuso del espacio de valores de utilidad (normalmente el espacio de números reales $\mathcal{R}$) a cada alternativa, x_i, $\nu : X \text{x} \mathcal{R} \longrightarrow [0,1]$, indicando $\nu(x_i, t)$ el grado de igualdad entre el valor de utilidad de la alternativa, x_i, y t.

3. *Una relación de preferencia difusa.* Las preferencias de un individuo sobre el conjunto de alternativas, X, se describen mediante una relación binaria difusa, P, definida sobre X, es decir, como un conjunto difuso definido sobre el producto cartesiano $X \text{x} X$, caracterizado por una función de pertenencia, $\mu_P : X \text{x} X \longrightarrow [0,1]$, cuyo valor $\mu_P(x_i, x_j)$ indica el grado de preferencia de la alternativa x_i sobre la x_j.

El uso de relaciones de preferencia difusas para expresar las preferencias de los individuos sobre las alternativas ha demostrado ser muy útil en la modelización de las situaciones de toma de decisiones. Entre otras, destacan aquellas situaciones de toma de decisiones en las que el resultado final depende de la agregación de las preferencias de los individuos, como por ejemplo, situaciones de TDG. Por tanto, en problemas de TDG es normal expresar las preferencias mediante relaciones de preferencia difusas, y son muchos los autores que así lo han hecho [5, 6, 10, 13, 15, 47, 50, 51, 52, 54, 62, 64, 66, 70, 71, 72, 73].

1.2.2 Definición del Problema de TDG Difuso

Una definición clásica de un problema de TDG difuso es como sigue: hay un conjunto finito de alternativas $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ $(n \geq 2)$, sobre el que ha de decidir un conjunto finito de individuos $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$ $(m \geq 2)$. Cada individuo, $e_k \in E$, expresa sus opiniones sobre X mediante una relación de preferencia difusa, $P^k \subset X\mathrm{x}X$, con función de pertenencia

$$\mu_{P^k} : X\mathrm{x}X \to [0, 1],$$

siendo $\mu_{P^k}(x_i, x_j) = p_{ij}^k$ el grado de preferencia de la alternativa x_i sobre la x_j, expresado por el individuo e_k. Se supone la existencia de un moderador, el cual asigna unos pesos, llamados grados de importancia, al conjunto de individuos E. Estos grados de importancia pueden ser definidos como un subconjunto difuso sobre E, caracterizado por una función de pertenencia, μ_E, definida como

$$\mu_E : E \to [0, 1],$$

siendo $\mu_E(k)$, el grado de importancia de las preferencias expresadas por el individuo e_k. Un valor $\mu_E(k) = 0$ significa que el individuo e_k no conoce nada el problema que se está tratando, por tanto sus preferencias no son importantes, y un valor $\mu_E(k) = 1$ indica todo lo contrario. Los valores intermedios indican los diferentes grados de importancia que pueden tomarse entre los anteriores puntos extremos. Si $\mu_E(1) = \mu_E(2) = \ldots = \mu_E(m)$ estamos en el caso de problemas de TDG homogéneos, y si no, en el caso de problemas de TDG heterogéneos. Para nosotros, el primer caso es equivalente a que no existan grados de importancia.

De igual modo, el moderador puede asignar unos pesos, llamados grados de relevancia, al conjunto de alternativas X. Estos grados de relevancia pueden ser definidos como un subconjunto difuso sobre X, caracterizado por una función de pertenencia, μ_R, definida como

$$\mu_R : X \rightarrow [0, 1],$$

siendo $\mu_R(i)$ el grado de relevancia de la alternativa x_i dentro del problema planteado.

Nota. Es importante notar que en esta configuración tradicional de un problema de TDG todas las opiniones, tanto las de los individuos como las del moderador, se suponen expresadas mediante valores numéricos tomados en el intervalo unidad [0,1]. En estos casos, se dice que el problema de TDG difuso está planteado en un contexto numérico. En la literatura existen múltiples desarrollos de procesos de selección y de consenso en este contexto, tanto para problemas de TDG homogéneos como heterogéneos [10, 28, 50, 51, 52]. En esta memoria el contexto asumido es diferente, se adopta el llamado contexto lingüístico, que pasamos a estudiar en la próxima sección.

1.3 Modelo Lingüístico del Problema de TDG

1.3.1 Enfoque Lingüístico en Toma de Decisiones

Como hemos visto en la anterior sección, normalmente, muchos de los investigadores en toma de decisiones trabajan bajo la hipótesis de que los individuos expresan sus opiniones mediante valores numéricos. Sin embargo, en multitud de ocasiones, es normal que los individuos tengan serios inconvenientes para expresar con valores numéricos sus grados de preferencia de unas alternativas sobre otras. Bajo estas circunstancias, parece más adecuado expresar sus opiniones por medio de valores lingüísticos en lugar de valores numéricos exactos, es decir, suponer que el dominio de las variables que intervienen en el problema es un conjunto de términos lingüísticos [21, 22, 31, 74, 55, 76, 83, 94].

El enfoque lingüístico se aplica cuando las variables que intervienen en un problema son de carácter lingüístico en vez de numérico [94]. Por ejemplo, en situaciones donde intervienen individuos, los cuales usan más bien descriptores lingüísticos que numéricos para dar sus opiniones. Con ello, se consigue modelar de forma más directa y apropiada gran cantidad de problemas reales, ya que nos permite representar la información de los individuos (casi siempre poco precisa) de manera muy aproximada a como inicialmente ellos se expresan.

Una variable lingüística se diferencia de una numérica en que sus valores no son números, sino palabras o sentencias del lenguaje natural, o de un lenguaje artificial [94]. En general, todos sabemos, que las palabras son menos precisas que los números. Por ello, el uso de variables lingüísticas no es siempre más adecuado que el de numéricas. Su aplicación se recomienda en aquellas situaciones donde las variables que intervienen en el problema son demasiado complejas y difíciles de definir de cara a captar su significado por medio de valores cuantitativos (numéricos), y entonces, conviene describirlas aproximadamente mediante valores cualitativos (lingüísticos). Para ello, se selecciona un conjunto apropiado de etiquetas, S, de acuerdo al dominio del problema, y en base a él los individuos expresan sus preferencias.

Desde un punto de vista formal una variable lingüística debe llevar asociadas dos reglas:

1. *una regla sintáctica,* que es, normalmente, una gramática que genera los valores de la variable, y

2. *una regla semántica,* que es un algoritmo que genera un significado para cada valor de la variable.

Una variable lingüística se define como sigue [94]:

Definición 1.3.1 *Una variable lingüística se define como una quintupla $(H, T(H), U, G, M)$. H simboliza el nombre de la variable. $T(H)$ (o simplemente T) el conjunto de términos de H, es decir la colección de todos los posibles valores de H. Una variable numérica, u, llamada variable base, se asocia a cada valor lingüístico, $z \in T(H)$, y toma valores,* *u', en el universo de discurso o dominio de la variable base U. G es la regla sintáctica (normalmente toma la forma de una gramática) que genera los valores z de T(H), y M es la regla semántica encargada de dar el significado, M(z), un subconjunto difuso de U, a cada valor z. Cada* $z \in T(H)$*, generado por G, es la etiqueta para la restricción difusa, M(z), definida sobre los valores de la variable base, u,*

$$M(z) = \{(u', \mu_z(u')), |u' \in U\},$$

indicando $\mu_z(u')$ *el grado de compatibilidad entre el valor de la varible base y el concepto expresado por el valor lingüístico z.*

1.3.2 Caracterización del Conjunto de Etiquetas

En este contexto, una tarea fundamental es la determinación del conjunto de etiquetas a usar para expresar las opiniones de los individuos. Como hemos mencionado, normalmente, dependiendo del dominio del problema y de acuerdo con todos los individuos, un apropiado conjunto de etiquetas lingüísticas se debe seleccionar. Hemos de ponernos de acuerdo sobre el nivel de distinción al que queremos expresar la incertidumbre, o lo que es lo mismo, la granularidad de la incertidumbre del conjunto de etiquetas [95], y sobre la semántica de las etiquetas, o lo que es lo mismo, qué tipo de funciones de pertenencia usar para caracterizar los valores lingüísticos.

El número de etiquetas escogidas determinará la granularidad del conocimiento incierto que se pueda expresar. En [7] se estudió el uso de conjuntos de etiquetas con cardinalidad impar, considerando que la etiqueta de la mitad representa un valor de "aproximadamente 0.5", y estando el resto de ellas distribuidas simétricamente en torno a ésta. Los estudios sociológicos realizados en [4] indican que el límite de granularidad para los individuos es de 11 o no más de 13 etiquetas, siendo los conjuntos más usados por los individuos aquellos de 5, 7, 9, 11, y 13 etiquetas. En la figura 1.3 aparace una estructura jerárquica de etiquetas. El nivel 1 presenta una granularidad que contiene tres etiquetas, el nivel 2 una granularidad con 7 etiquetas, y así, los diferentes niveles de granularidad podrían ser representados. Por supuesto, en la figura el nivel 4 presenta la granularidad más fina que se puede considerar en los procesos de decisión, es decir, los valores numéricos.

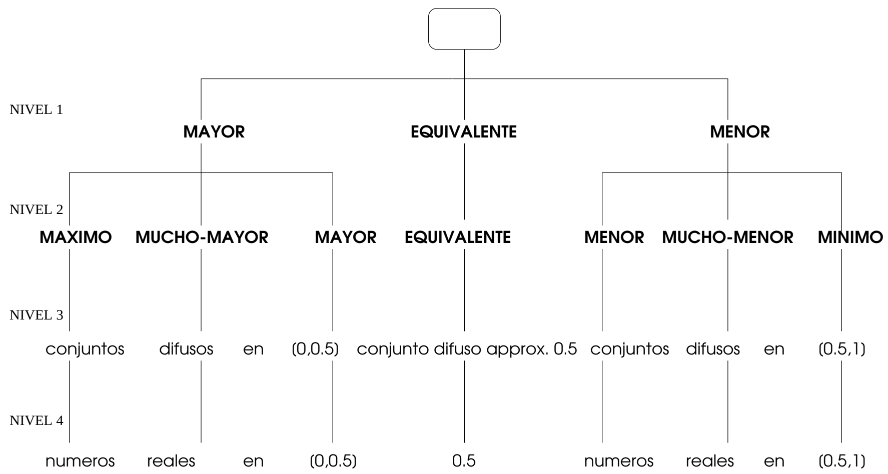

Figura 1.3. Jerarquía de las Etiquetas

Normalmente, la semántica de las etiquetas se da mediante números difusos definidos sobre el intervalo unidad [0,1], los cuales son descritos usando funciones de pertenencia. Dado que, las etiquetas lingüísticas son aproximaciones de expresiones lingüísticas propias de los individuos, aquí consideramos que las funciones de pertenencia trapezoidales lineales son suficientemente buenas para recoger la imprecisión de las expresiones humanas, ya que conseguir valores más exactos puede ser una tarea imposible e innecesaria. Esta representación establece una 4-tupla $(a_i, b_i, \alpha_i, \beta_i)$ para cada etiqueta. Los dos primeros parámetros indican el intervalo en el cual la función de pertenencia toma valor 1, y el tercero y cuarto la amplitud a la izquierda y a la derecha, respectivamente.

Desde un punto de vista formal, parece difícil aceptar el hecho de que todos los individuos estén de acuerdo sobre las funciones de pertenencia asignadas al conjunto de etiquetas, ya que no hay conceptos de distribuciones universalmente aceptadas. Por ejemplo, como se muestra en la figura 1.4, para una misma evaluación, esas dos diferentes percepciones pueden considerarse válidas. Además, como sucede en procesos de control, el problema de ajuste de funciones de pertenencia no es tarea fácil. Sin embargo, en nuestro contexto, asumiendo que el concepto de variable lingüística es un medio de aproximar información imprecisa, nosotros solventamos este incoveniente considerando que los individuos presentan concepciones similares y pueden distinguir perfectamente el mismo conjunto de etiquetas. Además, como veremos en otras secciones, nuestro desarrollo no usa las funciones de pertenencia para agregar etiquetas, sino que definimos operadores de agregación de etiquetas operando directamente sobre las mismas.

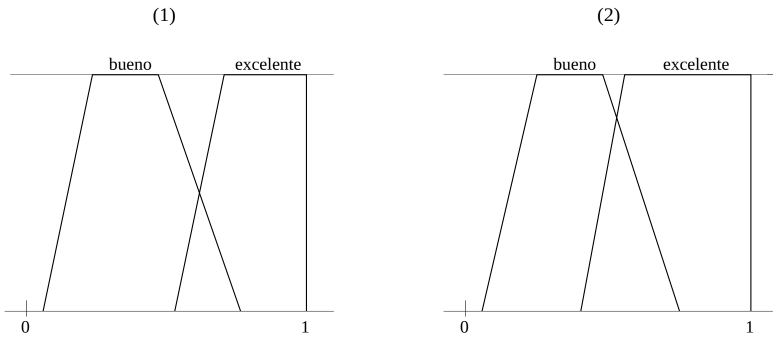

Figura 1.4. Diferentes Conceptos de Distribución

Aceptadas las ideas anteriores, la siguiente tarea consiste en establecer qué tipo de conjunto de etiquetas usaremos. Sea $S = \{s_i\}, i \in H = \{0, \ldots, T\}$ un conjunto de etiquetas finito y totalmente ordenado en el sentido usual [7, 20, 95]. Cualquier etiqueta s_i representa un valor posible de una variable real lingüística, es decir, una restricción o propiedad difusa definida en [0,1]. Como en [7], consideramos conjuntos de etiquetas, S, con cardinalidad impar, donde la etiqueta del centro representa una incertidumbre de "aproximadamente 0.5" y el resto de etiquetas está distribuído simétricamente a ambos lados de la misma. Además el conjunto de etiquetas satisface las siguientes propiedades:

1) *Es ordenado:* $s_i \geq s_j$ si $i \geq j$.

2) *Existe un operador de negación:* $NEG(s_i) = s_j$ tal que $j = T - i$.

3) *Existe un operador de máximo:* $MAX(s_i, s_j) = s_i$ si $s_i \geq s_j$.

4) *Existe un operador de mínimo:* $MIN(s_i, s_j) = s_i$ si $s_i \leq s_j$.

Ejemplo 1.3.2 Un ejemplo de un conjunto de etiquetas de estas características es el que aparece en el nivel 2 de la figura 1.3:

$$S = \{s_6 = MX, s_5 = MMA, s_4 = MA, s_3 = EQ, s_2 = ME, s_1 = MME, s_0 = MI\},$$

donde

$$MX = Máximo \quad MMA = Mucho\_Mayor \quad MA = Mayor$$
$$EQ = Equivalente \quad ME = Menor \quad MME = Mucho\_Mayor$$
$$MI = Mínimo$$

La figura 1.5 presenta un posible dominio del conjunto de etiquetas,

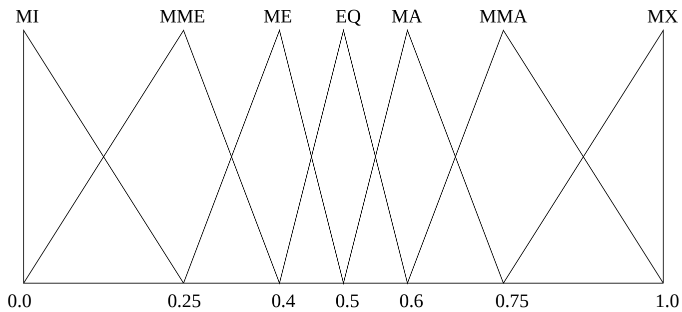

Figura 1.5. Dominio del nivel 2

siendo los valores de la representación los siguientes:

$$MX = (1, 1, 0, 0) \quad MMA = (.75, .75, .15, .25) \quad MA = (.6, .6, .1, .15)$$
$$E = (.5, .5, .1, .1) \quad ME = (.4, .4, .15, .1) \quad MME = (.25, .25, .25, .15)$$
$$MI = (0, 0, 0, .25)$$

□

1.3.3 Relaciones de Preferencia Lingüísticas en Problemas de TDG

Asumiendo el contexto lingüístico descrito antes, podemos considerar que los individuos expresan sus preferencias mediante relaciones de preferencia lingüísticas en vez de numéricas, de forma diferente a como sucede en el apartado 1.2.2. Por tanto, usando un conjunto de etiquetas apropiado, $S = \{s_i\}, i \in H = \{0, \ldots, T\}$, un individuo expresa sus preferencias sobre el conjunto de alternativas, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ $(n \geq 2)$, mediante una relación de preferencia lingüística, P, tal que, $P = (p_{ij}),\ i, j = 1, \ldots, n$. Cada $p_{ij} \in S$ indica su grado de preferencia de la alternativa x_i sobre la x_j de forma lingüística, de modo que,

$$s_0 \ \leq \ p_{ij} \ \leq \ s_T,\ (i, j = 1, \ldots, n),$$

con el siguiente significado:

1. $p_{ij} = s_T$ indica el grado máximo de preferencia de la alternativa x_i sobre la x_j.
2. $s_{T/2} < p_{ij} < s_T$ indica una definitiva preferencia por la alternativa x_i.
3. $p_{ij} = s_{T/2}$ indica indiferencia entre las alternativas x_i y x_j.

Asumiendo relaciones de preferencia numéricas para expresar las preferencias de los individuos, Tanino propuso un conjunto de propiedades o restricciones que se pueden exigir a las relaciones si se quiere que ellas reflejen realmente una preferencia [72, 73]. Algunas de estas propiedades, adecuadas al contexto lingüístico, son las siguientes:

1. *Reciprocidad*:
$$p_{ij} = NEG(p_{ji}),\ \text{y}\ p_{ii} = s_0\ \forall i, j.$$
2. *MAX-MIN Transitividad*:
$$p_{ik} \geq MIN(p_{ij}, p_{jk}),\ \forall i, j, k.$$
3. *MAX-MAX Transitividad*:
$$p_{ik} \geq MAX(p_{ij}, p_{jk}),\ \forall i, j, k.$$
4. *MAX-MAX Transitividad Restringida*:
$$p_{ij} \geq s_{T/2},\ p_{jk} \geq s_{T/2}, \Rightarrow p_{ik} \geq MIN(p_{ij}, p_{jk}),\ \forall i, j, k.$$
5. *MAX-MAX Transitividad Restringida*:
$$p_{ij} \geq s_{T/2},\ p_{jk} \geq s_{T/2}, \Rightarrow p_{ik} \geq MAX(p_{ij}, p_{jk}),\ \forall i, j, k.$$

En esta misma línea de razonamiento, con objeto de dar un mayor grado de libertad a los individuos en el modo de expresar sus preferencias, aquí proponemos las siguientes propiedades, que usaremos en algunos de nuestros desarrollos:

1. *Reciprocidad débil,* en el siguiente sentido [5],

   (a) Por definición $p_{ii} = s_0 \ \forall x_i \in X$ (la mínima etiqueta de S).

   (b) Si $p_{ij} \geq s_{T/2}$, entonces $p_{ji} \leq s_{T/2}$.

   La condición (a) es una convención, o sea, si sólo se considera una alternativa x_i, no se asigna preferencia alguna. La condición (b) parece lógica, pues cuando $p_{ij} \geq s_{T/2}$, de acuerdo con nuestra definición de relación de preferencia lingüística, parece razonable pensar que la preferencia complementaria, p_{ji}, debería automáticamente satisfacer que $p_{ji} \leq s_{T/2}$, ya que, de otro modo, incurriríamos en una contradicción.

2. *Completitud*, en el siguiente sentido [12],

$$p_{ij} \geq NEG(p_{ji}), \ \forall (x_i, x_j).$$

   Esta propiedad la requeriremos, a veces, para asegurar que todos los individuos asumen como factible y comprensible el conjunto de alternativas sobre el que expresan sus opiniones.

1.3.4 Enfoque Lingüístico del Problema de TDG

Aceptando que los individuos expresan sus preferencias en un dominio lingüístico, S, previamente establecido, un problema de TDG en contexto lingüístico se define como sigue: hay un conjunto finito de alternativas $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ $(n \geq 2)$, sobre el que ha de decidir un conjunto finito de individuos $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$ $(m \geq 2)$. Cada individuo, $e_k \in E$, expresa sus opiniones sobre X mediante una relación de preferencia lingüística, $P^k \subset X\mathrm{x}X$, con función de pertenencia

$$\mu_{P^k} : X\mathrm{x}X \rightarrow S,$$

siendo p_{ij}^k el grado de preferencia de la alternativa x_i sobre la x_j, expresado lingüísticamente por el individuo e_k. Entonces el problema consiste en encontrar el conjunto de alternativa(s) solución a partir de las preferencias de los individuos.

Del mismo modo que en el apartado 1.2.2, se puede suponer la existencia de un moderador, el cual asigna los grados de importancia (μ_E) y de relevancia (μ_R) a los individuos y alternativas, respectivamente. Ahora bien, en este punto, para nuestros desarrollos hemos considerado diferentes posibilidades o modelos de problemas de TDG:

1. **Tipo A.** Problemas de TDG homogéneos en contexto lingüístico, es decir, sin considerar la asignación de grados de importancia.

2. **Tipo B.** Problemas de TDG heterogéneos en contexto lingüístico, es decir, considerando la asignación de grados de importancia como en el apartado 1.2.2, o sea, evaluados en el intervalo [0,1], y por tanto,

$$\mu_E : E \to [0, 1].$$

3. **Tipo C.** Problemas de TDG heterogéneos en contexto lingüístico homogéneo, es decir, considerando la asignación de grados de importancia, pero asumiendo que el moderador los evalua en el mismo dominio lingüístico usado por los individuos para expresar sus preferencias, es decir,

$$\mu_E : E \to S.$$

4. **Tipo D.** Problemas de TDG heterogéneos en contexto lingüístico heterogéneo, es decir, considerando la asignación de grados de importancia, pero asumiendo que el moderador los evalúa en un dominio lingüístico, $V = \{v_i\}, i \in H = \{0, \ldots, T'\}$, diferente al usado por los individuos para expresar sus preferencias, y por tanto, $S \neq V$,

$$\mu_E : E \to V.$$

En los tipos de problemas de TDG heterogéneos B y D, consideramos además la asignación de grados de relevancia a las alternativas, evaluados en cada caso, en el mismo dominio en el que se expresan los grados de importancia respectivos. De cualquier modo, todos los desarrollos de la memoria, aunque están realizados en estos diferentes contextos de problemas, son trasladables fácilmente de unos a otros.

Planteado el problema de TDG en contexto lingüístico, en los siguientes capítulos analizamos algunos modelos de procesos de consenso y de selección para este tipo de problemas, basados en la agregación de información lingüística. Para ello, antes de abordarlos, el siguiente capítulo lo dedicamos a la presentación de los operadores de agregación de información lingüística que vamos a usar.

Capítulo 2

Operadores de Agregación de Información Lingüística

Este capítulo presenta los distintos operadores de agregación de información lingüística que usaremos en nuestros desarrollos. Todos los operadores propuestos tienen en común la característica de que actúan directamente sobre las etiquetas, es decir, con independencia de la semántica subyacente en las etiquetas, y funcionan en base a la estructura de los conjuntos de etiquetas establecida en el apartado 1.3.2. También cabe destacar que todos son operadores de agregación basados en el concepto de mayoría difusa, aquí representado mediante cuantificadores lingüísticos difusos. Por ello, este capítulo se estructura como sigue.

La primera sección se dedica a la presentación del concepto de mayoría difusa y de los cuantificadores lingüísticos difusos. La segunda aborda la presentación del operador de agregación de información lingüística no ponderada LOWA (Linguistic Ordered Weighted Averaging) y de una extensión del mismo, el operador I-LOWA (Inverse Linguistic Ordered Weighted Averaging). Y finalmente, la tercera muestra varios operadores de agregación de información lingüística ponderada lingüísticamente, en particular:

- Un operador Disyuntivo de agregación de información Lingüística Ponderada lingüísticamente DLP.
- Un operador Conjuntivo de agregación de información Lingüística Ponderada lingüísticamente CLP.

- Un operador Promedio de agregación de información Lingüística Ponderada lingüísticamente PLP.

En todos los casos, se realiza un estudio de las propiedades y axiomas que cada operador verifica, con objeto de demostrar la racionalidad de los mismos, es decir, de cara a justificar que siguen un comportamiento de "operadores de agregación buenos".

2.1 El Concepto de Mayoría Difusa

En cualquier contexto donde la solución que se obtenga dependa de varias fuentes de información, y en particular, en problemas de TDG, es preciso que la solución alcanzada refleje lo que la mayoría de individuos prefiere. Tradicionalmente, la idea de mayoría se entiende como un número crítico o conveniente de individuos. La mayoría difusa es una conceptualización más relajada y flexible de la idea de mayoría, la cual puede ser manejada usando el cálculo de las proposiciones cuantificadas lingüísticamente [96]. En problemas de TDG en contexto numérico, Kacprzyk fue el primero en especificar el concepto de mayoría difusa a través de cuantificadores lingüísticos difusos [47]. Aquí se usa de una forma muy parecida, pero en la agregación de información, es decir, en el campo de las agregaciones guiadas por cuantificadores [81, 85, 91]. En las próximas secciones se mostrará cómo hacerlo. Antes, en el siguiente apartado, introduciremos brevemente el concepto de cuantificadores lingüísticos difusos.

2.1.1 Cuantificadores Lingüísticos Difusos

Los cuantificadores se usan para representar la cantidad de elementos que satisfacen un predicado. La Lógica Clásica se restringe al uso de dos cuantificadores, "existe" ($\exists$) y "para todo" ($\forall$), los cuales se relacionan con los conectivos "o" e "y", respectivamente.

Sin embargo, en el lenguaje natural se utilizan muchos y diversos cuantificadores, por ejemplo, "alrededor de 5", "casi todos", "pocos", "muchos", "la mayoría", "tantos como sea posible", "cerca de la mitad", "al menos la mitad", etc,. Por tanto, sería bueno tener una técnica de representación del conocimiento que pudiera representar a este tipo de cuantificadores en los sistemas formales. Zadeh presentó el concepto de cuantificadores lingüísticos difusos como herramienta para conseguir dicho objetivo [96].

Zadeh sugirió que la semántica de un cuantificador lingüístico se puede representar mediante subconjuntos difusos [96]. Distinguió entre dos tipos de cuantificadores lingüísticos, cuantificadores absolutos y cuantificadores relativos o proporcionales.

Los cuantificadores absolutos se usan para representar cantidades absolutas en sí mismas, como "alrededor de 2" o "más de 5". Por tanto, ellos representan conceptos relativos a cantidades o número de elementos. Zadeh los define como subconjuntos difusos de números reales no negativos, $\mathcal{R}^+$. Con esta idea en la mente, Zadeh los representa mediante un subconjunto difuso, Q, tal que, $\forall r \in \mathcal{R}^+$, el grado de pertenencia de r en Q, $Q(r)$ indica el grado de compatibilidad entre la cantidad r y el significado representado por el cuantificador, Q. Un cuantificador proporcional, como "la mayoría", "al menos la mitad", se representa mediante subconjuntos difusos del intervalo unidad, [0,1], de modo que, de igual forma, $\forall r \in [0,1]$, $Q(r)$ indica el grado de compatibilidad entre la proporción r y el significado representado por el cuantificador, Q. Cualquier cuantificador del lenguaje natural se puede representar bien mediante uno proporcional, o bien, si se conoce la cardinalidad del conjunto de elementos considerado, mediante uno absoluto.

Funcionalmente, los cuantificadores lingüísticos pueden ser de uno de estos tres tipos: creciente, decreciente y unimodal. Un cuantificador tipo creciente se caracteriza por la siguiente relación

$$Q(r_1) \geq Q(r_2) \quad \text{si } r_1 > r_2,$$

y de este tipo son cuantificadores como "la mayoría", "al menos α" ($\alpha \in [0,1]$). Un cuantificador de tipo decreciente se caracteriza por la siguiente relación

$$Q(r_1) \leq Q(r_2) \quad \text{si } r_1 < r_2,$$

y de este otro tipo son cuantificadores como "pocos, "a lo sumo α". Los cuantificadores unimodales cumplen la siguiente propiedad,

$$Q(r_1) \leq Q(r_2) \leq Q(r_3) = 1 \geq Q(r_4),$$

con $r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq r_4$, y generalmente se usan para representar expresiones como "alrededor de q".

De acuerdo con Yager [81, 85], para nuestros desarrollos usamos cuantificadores proporcionales crecientes, los cuales satisfacen esta propiedad

$$Q(0) = 0, \text{ y } \exists\, r \in [0,1] \text{ tal que } Q(r) = 1,$$

y cuya función de pertenencia tiene la siguiente expresión:

$$Q(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < a \\ \frac{r-a}{b-a} & \text{si } a \leq r < b \\ 1 & \text{si } r \geq b \end{cases}$$

con $a, b, r \in [0,1]$.

Algunos ejemplos de cuantificadores proporcionales crecientes se muestran en la figura 2.1, cuyos parámetros, (a, b), son $(0.3, 0.8)$, $(0, 0.5)$ y $(0.5, 1)$, respectivamente.

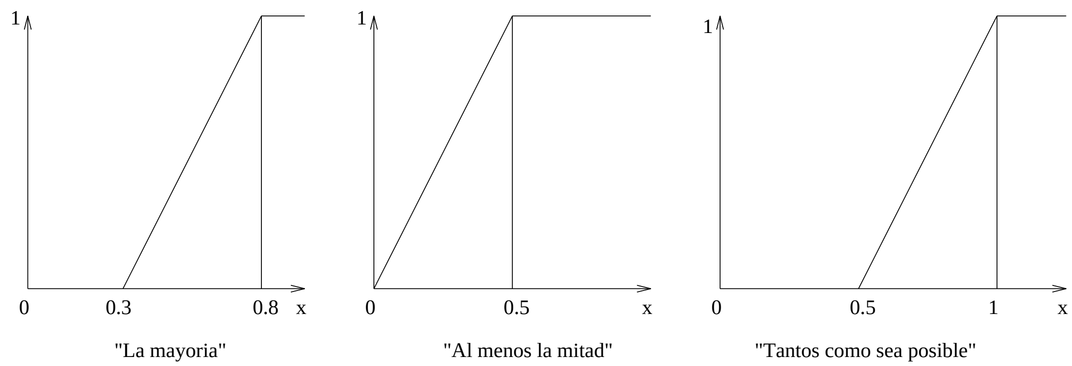

Figura 2.1. Cuantificadores Lingüísticos Difusos

Los cuantificadores tradicionales, como hemos visto, evalúan la información cuantificada en el intervalo unidad, [0,1], es decir, de forma numérica. Sin embargo, dado que en muchas situaciones necesitaremos cuantificar información de forma lingüística y de cara a crear un contexto más flexible, aquí, introducimos un nuevo tipo de cuantificador que toma valores lingüísticos en un conjunto de etiquetas $L = \{l_i\}$, $i \in H = \{0, \ldots, U\}$ (similar a aquellos definidos en el apartado 1.3.2). Cuando usamos un cuantificador proporcional que evalúa numéricamente lo notaremos, Q^1, y cuando evalúa lingüísticamente, Q^2,

$$Q^2 : [0,1] \rightarrow L.$$

Q^2 se define de acuerdo a la siguiente expresión:

$$Q^2(r) = \begin{cases} l_0 & \text{si } r < a \\ l_i & \text{si } a \leq r \leq b \\ l_U & \text{si } r > b \end{cases}$$

siendo l_0 y l_U las etiquetas mínimas y máximas de L, respectivamente, y

$$l_i = Sup_{l_q \in M}\{l_q\},$$

$$\text{con } M = \{l_q \ \in L : \ \ \mu_{l_q}(r) = Sup_{t \in J} \ \{\mu_{l_t}(\frac{r-a}{b-a})\}\},$$

y $a, b, r \in [0,1]$. Otra definición de Q^2 puede encontrarse en [84].

2.1.2 Tipos de Mayoría Difusa

Como veremos en próximas secciones, aplicamos los operadores de agregación a los problemas de TDG, en los cuales las preferencias son expresadas mediante relaciones de preferencia lingüísticas individuales, en base a dos sentidos globales diferentes de mayoría difusa:

1. **Mayoría difusa de alternativas.** Esta idea de mayoría se aplica en aquellos casos en los que tenemos como marco de referencia para efectuar agregaciones al conjunto de las alternativas. En este sentido, se aplica cuando queremos saber qué incidencia tiene sobre una alternativa las evaluaciones dadas a la mayoría de los pares de alternativas en los que ésta interviene.

2. **Mayoría difusa de individuos.** Se aplica cuando la referencia es el grupo de individuos. Consecuentemente, se usa para saber que incidencia tienen sobre un patrón de preferencia social la mayoría de las preferencias dadas por los individuos.

2.2 Operadores de Agregación de Información Lingüística No Ponderada

2.2.1 Introducción

En la realidad existen multitud de situaciones en las que se nos plantean problemas cuya solución depende de la información suministrada por diferentes fuentes de información. La información unas veces presenta un aspecto cuantitativo, riguroso y preciso, y otras, un aspecto cualitativo, poco riguroso e impreciso. Con objeto de modelar estas situaciones, se usan tradicionalmente variables numéricas para representar los aspectos cuantitativos, y más recientemente, variables lingüísticas para representar los aspectos cualitativos, como hemos visto en la sección 1.3. Ahora bien, para resolver el problema en función de todas las fuentes de información, antes de alcanzar una decisión o acción final, se precisa la aplicación de mecanismos adecuados de combinación de información, o lo que es lo mismo, operadores de agregación de información racionales. Además, cuando la información manejada no es igualmente importante, es decir, cuando estamos en contextos de trabajo heterogéneos, las situaciones se complican y se necesitan operadores de agregación de información ponderada racionales, es decir, operadores que recojan el efecto de las ponderaciones de la información.

Los problemas que aquí nos interesan, o sea, los problemas de TDG en contexto lingüístico, son un caso particular de las situaciones mencionadas. Como hemos visto en el apartado 1.3.4, algunos de los modelos de problemas de TDG que consideramos trabajan con informaciones lingüísticas no ponderadas, y otros, con informaciones lingüísticas ponderadas. Por ello, en este capítulo presentamos los distintos operadores de agregación de información lingüística que usaremos en nuestros desarrollos.

En un contexto difuso, son muchos los autores que se han dedicado al estudio y diseño de operadores de combinación de información. Entre ellos, destacan los trabajos sobre conectivos lógicos difusos, (las familias de operadores conjuntivos (t-normas) y disyuntivos (t-conormas) y operadores promedio) [1, 23, 56, 57, 82], funciones de implicación [77], operadores de agregación de información ponderada "MAX" y "MIN" [23, 24], operadores de generalización de t-normas y t-conormas [87, 90], operadores promedio ponderados ordenados [15, 16, 17, 81, 85, 86, 92], etc.. Aplicaciones del uso de algunos de estos operadores pueden encontrarse en [29]. Todos estos operadores tratan con información de naturaleza cuantitativa. Algunos trabajos sobre operadores de combinación de información cualitativa son [7, 11, 21, 32, 74, 75, 83, 84, 88, 89, 94]. Aquí, dado que trabajamos con problemas de TDG en contexto lingüístico, nos centramos en estos últimos, es decir, en el diseño de operadores de agregación de información lingüística.

En un contexto lingüístico se conocen dos tipos de operadores de agregación de etiquetas lingüísticas. Los primeros trabajan directamente sobre las etiquetas [21, 32, 83, 84, 89], y los segundos usan las funciones de pertenencia asociadas [7, 74, 75, 94].

Muchas de las aplicaciones usan operadores del último tipo. Sin embargo, éstas presentan el inconveniente de que sus resultados son conjuntos difusos que normalmente no se corresponden con ninguna de las etiquetas del conjunto original considerado. Por tanto, si se quiere obtener finalmente una etiqueta conocida, se ha de realizar un proceso de aproximación lingüística [7, 74, 75, 94]. Este proceso consiste en encontrar una etiqueta cuyo significado sea el mismo o esté próximo (de acuerdo a alguna métrica) al significado reflejado por el conjunto difuso no etiquetado generado. Existen diversas formas de realizar los procesos de aproximación, pero no hay ningún criterio genérico para evaluarlas ni método genérico alguno que asocie una etiqueta a un conjunto difuso. En cada caso, se evalúan las necesidades, y bien se toman algunos de los procesos de aproximación existentes, o bien se diseñan otros hechos a medida.

En esta memoria desarrollamos operadores del primer tipo, y más concretamente, en esta sección diseñamos operadores de agregación de información lingüística no ponderada, uno de los tipos de información que manejamos en los problemas de TDG que se estudian. La próxima sección la dedicamos al diseño de operadores de agregación de información lingüística ponderada, el otro tipo de información que manejamos.

2.2.2 Definición del Operador LOWA

El operador de agregación de información lingüística no ponderada LOWA (Linguistic Ordered Weighted Averaging), que aquí presentamos, es una versión formal y definitiva de aquella presentada inicialmente en [32].

El operador LOWA está basado en el operador OWA (Ordered Weighted Averaging) definido en [81], y en la combinación convexa de etiquetas lingüísticas definida en [21].

El operador OWA es un operador de agregación de información numérica cuya definición es la siguiente [81]:

Definición 2.2.1 *Una función*

$$f : I^m \rightarrow I \,(\textit{donde } I = [0,1])$$

es un operador OWA de dimensión m si tiene asociado un vector de ponderación $W = [w_1, \ldots, w_m]$, tal que,

1. $w_i \in [0,1]$,
2. $\Sigma_i w_i = 1$,

y donde f presenta la siguiente expresión,

$$f(a_1, \ldots, a_m) = w_1 b_1 + w_2 b_2 + \ldots + w_m b_m, a_j \in [0,1],$$

siendo b_i el i-ésimo mayor elemento de la colección $(a_1, \ldots, a_m)$. Si notamos como B al vector de orden m formado por los argumentos de f ordenados en orden descendente, entonces f toma esta expresión:

$$f(a_1, \ldots, a_m) = W \cdot B^T.$$

De entre sus propiedades destacan (i) la monotonía respecto a los valores de sus argumentos, (ii) la conmutatividad, y muy especialmente (iii) la de ser un operador "orand", es decir, que satisface la siguiente relación

$$MIN\{a_1, \ldots, a_m\} \leq f(a_1, \ldots, a_m) \leq MAX\{a_1, \ldots, a_m\}.$$

En [84] se extendió la definición del operador OWA a etiquetas lingüísticas . Aquí se extiende usando el operador de combinación convexa de etiquetas lingüísticas definido en [21].

Definición 2.2.2 *Sea $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ un conjunto de etiquetas a agregar, $a_i \in S$, entonces el operador LOWA, ϕ, se define como*

$$\phi(a_1, \ldots, a_m) = W \cdot B^T = \mathcal{C}^m\{w_k, b_k, k = 1, \ldots, m\} =$$

$$= w_1 \odot b_1 \oplus (1 - w_1) \odot \mathcal{C}^{m-1}\{\beta_h, b_h, h = 2, \ldots, m\}$$

donde $W = [w_1, \ldots, w_m]$, es un vector de ponderación, tal que,

1. $w_i \in [0, 1]$,
2. $\Sigma_i w_i = 1$,

y $\beta_h = w_h / \Sigma_2^m w_k, h = 2, \ldots, m$, siendo $B = (b_1, \ldots, b_m)$ un vector asociado a A, tal que,

$$B = \sigma(A) = (a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)})$$

donde, $a_{\sigma(j)} \leq a_{\sigma(i)}\ \forall\ i \leq j$, siendo σ una permutación definida sobre el conjunto de etiquetas A. $\mathcal{C}^m$ es el operador de combinación convexa de m etiquetas, de modo que si $m = 2$, entonces se define como

$$\mathcal{C}^2\{w_i, b_i, i = 1, 2\} = w_1 \odot s_j \oplus (1 - w_1) \odot s_i = s_k, \quad s_j,\ s_i\ \in\ S,\ (j \geq i),$$

$$k\ =\ MIN\{T, i\ +\ round(w_1 \cdot (j - i))\},$$

"round" simboliza el operador de redondeo usual, y $b_1 = s_j$, $b_2 = s_i$. Por otro lado, si $w_j = 1$ y $w_i = 0$ con $i \neq j\ \forall i$, entonces el operador de combinación se define como

$$\mathcal{C}^m\{w_i, b_i, i = 1, \ldots, m\} = b_j.$$

		$1 - w_1 = 0.6$			
		MME	**MMA**	**MX**	**MME**
	MX	EQ	MMA	MX	EQ
$w_1 = 0.4$	**MI**	MME	EQ	MA	MME
	ME	MME	EQ	MA	MME
	EQ	ME	MA	MMA	ME

Tabla 2.1. Tabla del LOWA con $m = 2$

Un ejemplo de aplicación del operador LOWA con $m = 2$ y $W = [0.4, 0.6]$, usando el conjunto de siete etiquetas visto en el ejemplo 1.3.2, se muestra en la tabla 2.1, donde por ejemplo:

$$k_{11} = \mathrm{MIN}\{6, 1 + round(0.4 * (6 - 1))\} = 3 \Rightarrow l_{k_{11}} = \mathrm{EQ}$$
$$k_{21} = \mathrm{MIN}\{6, 0 + round(0.6 * (1 - 0))\} = 1 \Rightarrow l_{k_{21}} = \mathrm{MME}$$

A continuación, presentamos otro operador de agregación de información no ponderada, el cual es una extensión del operador LOWA, denominado operador I-LOWA (Inverse LOWA). Lo usaremos en la definición de alguno de nuestros operadores de agregación de información lingüística ponderada.

Definición 2.2.3 *Un operador I-LOWA (Inverse-Linguistic Ordered Weighted Averaging), ϕ^I, es un tipo de operador LOWA, en el que se satisface la relación,*

$$B = \sigma^I(A) = (a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)}),$$

$$a_{\sigma(i)} \leq a_{\sigma(j)} \ \forall \ i \leq j.$$

Y por tanto, si m=2, entonces se define como

$$\mathcal{C}^2\{w_i, b_i, i = 1, 2\} = w_1 \odot s_j \oplus (1 - w_1) \odot s_i = s_k, \quad s_j, \ s_i \ \in \ S, \ (j \leq i)$$

$$k \ = \ MIN\{T, i \ + \ round(w_1 \cdot (j - i))\}.$$

Si comparamos las definiciones de los operadores LOWA e I-LOWA, se puede observar que en el primero los valores más grandes se estiman más que los bajos, y lo contrario ocurre en el segundo. Desde este punto de vista, podemos decir que el operador LOWA presenta rasgos propios de un operador de agregación tipo máximo o MAX, y el I-LOWA de un operador de agregación tipo mínimo o MIN. Esta peculiaridad se usará posteriormente en las definición de uno de nuestros operadores de agregación ponderada.

2.2.3 Cómo Obtener el Vector de Ponderación del Operador LOWA

Una cuestión que queda aún por resolver en la definición del operador LOWA, es cómo obtener el vector de ponderación asociado. En [81, 85], se proponen dos formas de hacerlo. La primera consiste en usar algún tipo de mecanismo de aprendizaje que lo infiera desde algún conjunto de datos de muestra. La segunda consiste en intentar darle algún significado o alguna semántica.

Un área de aplicación de la segunda opción, que aquí nos interesa, es el área de agregaciones guiadas por cuantificadores [91]. Nuestra idea es obtener el vector de ponderación usando cuantificadores lingüísticos difusos en un intento de representar el concepto de mayoría difusa en las agregaciones que se realicen. Por tanto, en el operador LOWA el concepto de mayoría difusa subyace en el vector de ponderación. De este modo, en todos los modelos de TDG que desarrollamos posteriormente hacemos patente el hecho de que todas las decisiones se toman de acuerdo a lo que la mayoría de individuos prefiere.

En [81, 85], se sugiere una forma innovadora de calcular el vector de ponderación del operador OWA mediante cuantificadores lingüísticos difusos, que para el caso de cuantificadores proporcionales crecientes del tipo Q^1, viene dada por esta expresión:

$$w_i = Q^1(i/n) - Q^1((i-1)/n), i = 1, \ldots, n.$$

Cuando usamos cuantificadores lingüísticos difusos, Q^1, para obtener el vector de ponderación de los operadores LOWA e I-LOWA, los simbolizamos como ϕ_{Q^1} y $\phi^I_{Q^1}$, respectivamente.

Dependiendo del cuantificador lingüístico difuso que usemos, podemos observar las siguientes peculiaridades de los operadores LOWA e I-LOWA:

1. Si tomamos el cuantificador "todos", mostrado en la figura 2.2, cuya función de pertenencia es

$$Q^1(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq r < 1 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

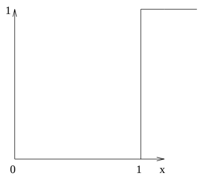

Figura 2.2. Cuantificador Lingüístico Difuso "Todos"

entonces se satisfacen las relaciones

$$\phi_{Q^1}(a_1, \ldots, a_m) = MIN(a_1, \ldots, a_m),$$

$$\phi^I_{Q^1}(a_1, \ldots, a_m) = MAX(a_1, \ldots, a_m).$$

2. Si tomamos el cuantificador "al menos m", Q^1_m mostrado en la figura 2.3, cuya función de pertenencia es

$$Q^1_m(r) = \begin{cases} \frac{r}{(1/m)} & \text{si } r < (1/m), \ r \in [0,1] \\ 1 & \text{si } r \geq (1/m) \end{cases}$$

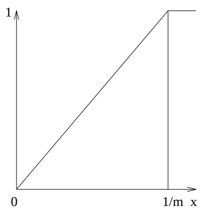

Figura 2.3. Cuantificador Lingüístico Difuso "Al menos m"

entonces se satisfacen las relaciones

$$\phi_{Q^1_m}(a_1, \ldots, a_m) = MAX(a_1, \ldots, a_m),$$

$$\phi^I_{Q^1_m}(a_1, \ldots, a_m) = MIN(a_1, \ldots, a_m).$$

2.2.4 Propiedades del Operador LOWA

El operador LOWA presenta algunas de las propiedades del operador OWA analizadas en [81], en particular, la propiedad monótona, la propiedad conmutativa, y la propiedad de ser un operador "orand". Antes de comprobar estas propiedades, demostraremos el siguiente resultado.

Teorema 2.2.4 *Sea* A=$[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ *(*$a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$*) un vector ordenado de etiquetas y* $a_i \in S$*, entonces*

$$a_n \leq \phi(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq a_1$$

Demostración.

En [21] se demostró la siguiente propiedad:

- Si s_k es la etiqueta resultante de realizar la combinación convexa de dos etiquetas, s_i y s_j $(i \leq j)$, entonces $i \leq k \leq j$.

Claramente, el teorema es una consecuencia de esta propiedad. □

Teorema 2.2.5 *El operador LOWA es* **monótono creciente** *respecto a sus argumentos, en el sentido de que si tenemos unos vectores de argumentos ordenados,* $A = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$, *y* $B = [b_1, b_2, \ldots, b_n]$*, tal que,* $\forall\ j,\ a_j \geq bj$ *entonces*

$$\phi(A) \geq \phi(B).$$

Demostración.

La demostración la realizamos por inducción sobre el número de argumentos a agregar.

-Para $n = 2$

Sean $s_j,\ s_i,\ s_p,\ s_q$, las etiquetas ordenadas de S, correspondientes a $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2,$

respectivamente. Es claro que $j \geq p$ e $i \geq q$, y por tanto para cualquier peso $w_1 \in [0,1]$ tenemos que

$$j \cdot w_1 \geq p \cdot w_1$$

y

$$i \cdot (1 - w_1) \geq q \cdot (1 - w_1),$$

y por tanto

$$j \cdot w_1 + i \cdot (1 - w_1) \geq p \cdot w_1 + q \cdot (1 - w_1).$$

Ahora, como *round* es una función monótona creciente, entonces se satisface que

$$round(j \cdot w_1 + i \cdot (1 - w_1)) \geq round(p \cdot w_1 + q \cdot (1 - w_1)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow round((j - i) \cdot w_1) + i)) \geq round((p - q) \cdot w_1) + q));$$

y como $i \in \mathcal{Z}^+$ y $((j - i) \cdot w_1) > 0$ entonces

$$i + round((j - i)w_1) \geq q + round((p - q)w_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \phi(a_1, a_2) \geq \phi(b_1, b_2).$$

-Suponemos que es cierto para n-1, es decir,

$$\phi(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) \geq \phi(b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}).$$

-Para n
Sabemos que

$$\phi(a_1, a_2, \ldots, a_n) = w_1 \odot a_1 \oplus (1 - w_1) \odot \mathcal{C}^{n-1}\{\beta_h, a_h, h = 2, \ldots, n\},$$

y

$$\phi(b_1, b_2, \ldots, b_n) = w_1 \odot b_1 \oplus (1 - w_1) \odot \mathcal{C}^{n-1}\{\beta_h, b_h, h = 2, \ldots, n\}.$$

Como

$$\mathcal{C}^{n-1}\{\beta_h, a_h, h = 2, \ldots, n\} = \phi(a_2, a_3, \ldots, a_n),$$

y

$$\mathcal{C}^{n-1}\{\beta_h, b_h, h = 2, \ldots, n\} = \phi(b_2, b_3, \ldots, b_n),$$

entonces por hipótesis de inducción

$$\phi(a_2, a_3, \ldots, a_n) \;\geq\; \phi(b_2, b_3, \ldots, b_n).$$

Sean s_j, s_i, las etiquetas resultantes de $\phi(a_2, a_3, \ldots, a_n)$ y $\phi(b_2, b_3, \ldots, b_n)$ respectivamente, entonces usando la hipótesis de inducción $s_j \;\geq\; s_i$, como $a_1 \;\geq\; b_1$, y por el teorema 2.2.4, $a_1 \;\geq\; s_j$ y $b_1 \;\geq\; s_i$, entonces

$$\phi(a_1, a_2, \ldots, a_n) \;=\; \phi(a_1, s_j),$$

y

$$\phi(b_1, b_2, \ldots, b_n) \;=\; \phi(b_1, s_i).$$

Ahora bien, sabemos que se satisface esta relación para $n = 2$

$$\phi(a_1, s_j) \;\geq\; \phi(b_1, s_i),$$

por lo que, efectivamente,

$$\phi(a_1, a_2, \ldots, a_n) \;\geq\; \phi(b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

□

Teorema 2.2.6 *El operador LOWA es* **conmutativo***:*

$$\phi(a_1, a_2, \ldots, a_n) \;=\; \phi(\pi(a_1), \pi(a_2), \ldots, \pi(a_n))$$

donde π es una permutación definida sobre el conjunto de argumentos.

Demostración.

Obviamente el operador LOWA satisface esta propiedad, ya que actúa ordenando previamente los argumentos antes de combinarlos. □

Teorema 2.2.7 *El operador LOWA es un operador* **"orand"***, es decir, para cualquier vector de ponderación, W, y conjunto de etiquetas A=[$a_1, a_2, \ldots, a_n$], entonces*

$$MIN(a_1, a_2, \ldots, a_n) \;\leq\; \phi(a_1, a_2, \ldots, a_n) \;\leq\; MAX(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

Demostración.

Claramente este teorema es consecuencia del teorema 2.2.4. □

2.2.5 Axiomática del Operador LOWA

Todo operador de agregación debería satisfacer una axiomática que garantice su correcta forma de actuar, y en particular el operador LOWA. Ya hemos visto que satisface algunas de las propiedades fundamentales que un operador de agregación bueno debe verificar. A continuación estudiamos algunos de los axiomas, propuestos en la literatura, que deben de caracterizar a un operador de agregación difuso aceptable, para posteriormente, analizar los axiomas que caracterizan al operador LOWA.

Cómo agregar las preferencias de los individuos para obtener una decisión colectiva, de manera que algún criterio racional sea satisfecho, es una de las cuestiones capitales en los problemas de TDG. El problema puede ser planteado desde muchos puntos de vista, por ejemplo, como un caso especial de agregación de información en Toma de Decisiones con Múltiples Personas y Múltiples Criterios o Teoría de Selección Social (ver, por ejemplo, los estudios hechos en los libros [29, 52, 64] y en los artículos [26, 65, 81]).

Muchos trabajos de Teoría Clásica de TDG toman el trabajo realizado por Arrow [2] como punto de partida y guía básica. Arrow propuso un conjunto de axiomas que cualquier técnica de agregación aceptable debía satisfacer cuando se trabaja con problemas de TDG. El Teorema de Imposibilidad de Arrow fue uno de sus importantes resultados. De acuerdo con este teorema, es imposible agregar preferencias individuales en preferencias colectivas de forma completamente racional. Este es un problema superable en contexto difuso, mediante el uso de intensidades de preferencia, lo que proporciona diferentes grados de libertad en las técnicas de agregación [26, 13]. Por tanto, es preciso tener una axiomática que caracterice los procesos de agregación en contexto difuso.

En [30, 58, 19] se han propuesto parcialmente algunas axiomáticas. Todos ellos han trabajado en un contexto difuso clásico, es decir, con preferencias numéricas. En [30] se presentó un conjuntos de axiomas para la TDG difusa racional de cara a justificar las operaciones de agregación MIN y MAX. En [58] se presentó los conceptos homólogos difusos del "veto" y la "dictadura", y en [19] se dio una colección de axiomas para la agragación de preferencias ponderadas difusas y se comprobó que el operador "media ponderada" satisface estos axiomas.

En [26] se presenta un análisis muy detallado sobre todas las aproximaciones axiomáticas propuestas para la TDG racional difusa. En este trabajo, entre otras cosas, se estudió un conjunto completo de axiomas en contexto difuso para problemas TDG homogéneos. Estos axiomas son características propias de cualquier procedimiento de elección que incluyen aquellos propuestos por Arrow. Algunos de ellos son el de dominio no restringido, de unanimidad, de neutralidad,..., y se clasifican en tres grupos:

- *Axiomas imperativos*, cuya violación conduce a modos de agregación poco intuitivos, e.g.: la neutralidad.
- *Axiomas técnicos*, que facilitan la representación y la definición del operador de agregación, e.g.: el dominio no restringido.
- *Axiomas opcionales*, que se aplican en circunstancias especiales, pero no son universalmente aceptados, e.g.: la unanimidad.

Está claro, que un operador concreto no tiene porqué satisfacer todos los axiomas a la vez, sino que debe satisfacer aquellos que sus circunstancias especiales de aplicación requieran. Más información sobre la axiomática de agregación de preferencias difusas en grupos homogéneos puede hallarse en [26].

Como hemos dicho, a continuación estudiamos la axiomática del operador LOWA, comprobando algunos de los axiomas propuestos en contexto difuso, pero teniendo en cuenta que el operador LOWA trabaja con preferencias lingüísticas. Antes de iniciar el estudio axiomático del operador LOWA, ϕ, introducimos la notación que vamos a usar.

Sea $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un conjunto finito no vacío de alternativas.

Sea $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$ un grupo de individuos.

Sea $S = \{s_i : \; i = 0, .., T\}$ un conjunto de etiquetas para expresar las preferencias.

Sea $x_{ij} \in S$ la evaluación lingüística asignada por el individuo e_j a la alternativa x_i.

Sea F_j el conjunto de evaluaciones lingüísticas dadas por el individuo e_j a las alternativas.

Sea μ_{F_j} la función de pertenencia lingüística F_j, tal que, $x_{ij} = \mu_{F_j}(x_i)$.

Sea F el conjunto de evaluaciones lingüísticas obtenidas como $F = \phi(F_1, \ldots, F_n)$.

- **Axioma I**: *Dominio No Restringido.* Para cualquier conjunto de patrones de preferencia individuales $\{F_j,\ j = 1, \ldots, m\}$ existe un patrón de preferencia social F, que se construye como:

$$\forall F_1, \ldots, F_m \in S^n,\ \exists F \in S^n \text{ tal que } F = \phi(F_1, \ldots, F_m).$$

Este es un axioma técnico básicamente, y es satisfecho directamente por el operador LOWA a partir de su definición.

- **Axioma II**: *Unanimidad o Idempotencia.* Si todos escogen un mismo patrón de preferencias, éste debe ser elegido como el patrón de selección social,

$$F_j = F, \forall j \Rightarrow F = \phi(F, F, \ldots, F).$$

Como antes, a partir de la definición del operador LOWA vemos que se verifica.

- **Axioma III**: *Asociación Positiva de las Preferencias Sociales e Individuales.* Si un individuo incrementa su intensidad de preferencia lingüística sobre una alternativa x_i entonces la preferencia social lingüística sobre x_i no puede disminuir. Esto significa que si F_j' y F_j son conjuntos de evaluaciones tal que $\mu_{F_j} \leq \mu_{F_j'}$, entonces si $\phi(F_1, \ldots, F_j, \ldots, F_m) = F$ y $\phi(F_1, \ldots, F_j', \ldots, F_m) = F'$, se satisface la siguiente relación,

$$\mu_F \leq \mu_{F'}.$$

Obviamente el operador LOWA lo satisface, pues es una consecuencia del teorema 2.2.5, es decir, de la propiedad de monotonía creciente.

- **Axioma IV**: *Independencia de las Alternativas Irrelevantes.* La intensidad de la preferencia social sobre una alternativa x_i sólo depende de las intensidades de preferencia asignadas por los individuos a x_i, y no de las asignadas a otras alternativas x_k, $k \neq i$,

$$\mu_{\phi(F_1,\ldots,F_m)}(x_i) = \varphi(x_{i1}, \ldots, x_{im}).$$

Este axioma es técnico, básicamente, y el operador LOWA lo satisface claramente.

Nota. No obstante, este axioma no se puede extender universalmente. Así, por ejemplo, en problemas donde las evaluaciones sobre las alternativas se den mediante relaciones de preferencia, tratamos con evaluaciones sobre pares de alternativas y el axioma no es aplicable.

- **Axioma V**: *"Soberanía".* Implica que cualquier patrón de preferencia social es consecuencia de las preferencias del conjunto de los individuos; en otras palabras

  $$\forall F, \exists F_1, \ldots, F_m \text{ tal que } F = \phi(F_1, \ldots, F_m)$$

  La forma más débil de este axioma es el llamado "Estado No Dictatorial" [58], o lo que es lo mismo: la no existencia de un individuo e_j de modo que

  $$\phi(F_1, \ldots, F_j, \ldots, F_m) = F_j.$$

  Esta restricción prohibe la existencia de individuos cuya actitud pueda ser calificada de un "veto" o una "dictadura" ante determinadas circunstancias.

  Obviamente, el operador LOWA satisface este axioma en su forma general, ya que este axioma es una consecuencia del axioma II (unanimidad). Además, dado que el operador LOWA es conmutativo (teorema 2.2.6), también satisface su forma más débil.

- **Axioma VI**: *Descomponibilidad del Procedimiento de Elección.* Según este axioma ha de ser posible particionar el grupo de individuos en subgrupos disjuntos, construir el patrón de preferencia social para cada subgrupo y posteriormente obtener el resultado final combinando todos los patrones de preferencia social locales. Algunas variantes de este axioma son:

  1. *Forma más fuerte: propiedad Asociativa.*

     $$\phi(\phi(F_1, F_2), F_3) = \phi(F_1, \phi(F_2, F_3)).$$

  2. *Forma más débil: propiedad Auto-Distributiva.*

     $$\phi((F_1, \phi(F_2, F_3)) = \phi(\phi(F_1, F_2), \phi(F_1, F_3)).$$

  El operador LOWA no verifica este axioma en todas sus formas. En efecto,

– *El operador LOWA no es asociativo.*

Veámoslo con un ejemplo. Supongamos que tenemos un conjunto de nueve etiquetas, $S = \{s_i \mid i = 0, \ldots, 8\}$, para expresar las preferencias. Sean $s_7,\ s_6,\ s_5$ las preferencias de tres individuos sobre una alternativa dada que queremos agregar. Si el vector de ponderación es $W = [0.3, 0.7, 0.0]$ entonces

$$\phi(\phi(s_7,\ s_6),\ s_5) = s_5\ \neq\ s_6 = \phi(s_7,\ \phi(s_6,\ s_5)).$$

– *El operador LOWA no es auto-distributivo.*

Por ejemplo, asumiendo las mismas circunstancias del ejemplo anterior, consideremos que $s_1,\ s_2,\ s_4$ son las preferencias a agregar, entonces

$$\phi(s_1,\ \phi(s_2,\ s_4)) = s_2\ \neq\ s_1 = \phi(\phi(s_1,\ s_2), \phi(s_1,\ s_4)).$$

- **Axioma VII**: *Neutralidad.* Este axioma se refiere a las propiedades invariantes del procedimiento de elección. Puede hablarse de neutralidad en tres sentidos diferentes:

  1. *Neutralidad respecto a las alternativas.* Si tenemos dos alternativas x_i y x_k de modo que $x_{ij} = x_{kj},\ \forall j$, entonces

  $$\mu_{\phi(F_1,\ldots,F_m)}(x_i) = \mu_{\phi(F_1,\ldots,F_m)}(x_k).$$

  2. *Neutralidad respecto a los electores.* En grupos de individuos homogéneos, este tipo de neutralidad se denomina "anonimato", y por tanto coincide con la conmutatividad de ϕ.

  3. *Neutralidad respecto a la escala de las intensidades o neutralidad del complemento.* Si F_j^c es la evaluación complemento de $F_j,\ \forall j,\ F_j^c$=NEG(F_j), entonces el patrón de preferencia social, $\phi(F_1^c, \ldots, F_m^c)$, debería ser el complemento del patrón de preferencia social,

  $$(\phi(F_1, \ldots, F_m))^c = \phi(F_1^c, \ldots, F_m^c)$$

Claramente, el operador LOWA satisface la propiedad de neutralidad con respecto a las alternativas. También verifica la neutralidad respecto a los electores ya que es conmutativo. Sin embargo, no verifica la propiedad de neutralidad del complemento.

Así, por ejemplo, consideramos un conjunto de ocho etiquetas, $S = \{s_i \mid i = 0, \ldots, 7\}$, para expresar las preferencias. Entonces si $s_3, s_2 \in S$ son las preferencias a agregar, dado que sus preferencias complementarias son s_4, s_5, y tomando un vector de ponderación $W = [0.1, 0.9]$, se obtiene

$$NEG(\phi(s_3, s_2)) = s_5 \neq s_4 = \phi(s_4, s_5).$$

En conclusión, hemos demostrado que el operador LOWA tiene una forma de agregar aceptable y racional ya que:

- por un lado, como vimos en el apartado 2.2.4, verifica dos de las propiedades fundamentales que todo buen operador de agregación debe satisfacer, puesto que es monótono creciente y conmutativo;
- y por otro, como hemos visto en este apartado, verifica algunos de los axiomas o criterios racionales exigidos a un aceptable operador de agregación ponderada como son los del dominio no restringido, la unanimidad o idempotencia, la asociación positiva de las preferencias sociales e individuales, la independencia de las alternativas irrelevantes, la soberanía, y la neutralidad respecto a las alternativas y a los electores.

2.3 Operadores de Agregación de Información Lingüística Ponderada

2.3.1 Introducción

En bastantes actividades encontramos muchos problemas que depende de procesos de agregación, en los que la información que interviene no es igualmente importante, es decir, se nos plantean en contextos heterogéneos. Por ejemplo, cuando un grupo de especialistas médicos expresan sus creencias sobre la posible enfermedad que un paciente dado puede padecer, hay que considerar dos aspectos: (i) que sus diagnósticos no deben de considerarse por igual, ya que habrá médicos con mayor experiencia o con más años de estudio que otros, y por tanto, todas las opiniones no deben de inspirar la misma confianza; y (ii) que el diagnóstico final debe ser tomado en función de los diagnósticos iniciales de todos los médicos. Este contexto heterogéneo ha sido considerado por varios autores en temas de operadores de agregación de opiniones [19, 61, 26, 88, 90], emparejamiento de patrones difusos [25], y sistemas basados en conocimiento [67].

Una forma de modelar el primer aspecto es asignando un peso o grado de importancia a cada médico especialista. Los pesos pueden ser valores cualitativos o cuantitativos, y admiten al menos dos posibles interpretaciones [25, 26]:

1. Cada médico puede ser visto individualmente y el peso refleja la importancia relativa de ese médico.
2. El peso refleja la importancia o relevancia del médico en el grupo. Este nivel de importancia puede actuar como una restricción impuesta a las opiniones del médico.

El segundo aspecto, en general, puede tratarse usando operadores de agregación de información ponderada antes de alcanzar una decisión final. En contexto difuso, algunos resultados sobre operadores de este tipo trabajando con valores numéricos y lingüísticos pueden encontrarse en [19, 24, 25, 61, 67, 78, 80, 88, 90] y [11, 83, 88, 89], respectivamente. Como en la sección anterior, en ésta estamos interesados en el segundo tipo de operadores. Más concretamente, estamos interesados en diseñar operadores (i) actuando directamente sobre las etiquetas, en el sentido argumentado en el apartado 2.2.3, (ii) que permitan reflejar el concepto de mayoría difusa, como aquellos definidos en la sección anterior, y (iii) que combinen información lingüística ponderada lingüísticamente.

Sea $\{(c_1, a_1), \ldots, (c_m, a_m)\}$ un conjunto de opiniones ponderadas expresadas por un conjunto de individuos, $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$, al evaluar una alternativa $x_j \in X$, donde a_i muestra la opinión del individuo e_i, evaluada lingüísticamente sobre el conjunto de etiquetas S, $a_i \in S$, y c_i el grado de importancia del individuo e_i, evaluado lingüísticamente sobre el conjunto de etiquetas V, $c_i \in V$. Entonces, siguiendo los estudios de

Cholewa [19] y los modelos de agregación de Montero [61] la definición de todo operador de agregación de información ponderada ha de contemplar dos agregaciones:

- (i) la de los grados de importancia en un grado social, c_E, y
- (ii) la de las opiniones ponderadas en una opinión social, a_E.

En nuestro caso, en todos los operadores que proponemos, la agregación de los grados de importancia la resolvemos usando el operador LOWA. Antes de presentar nuestros operadores, en el próximo apartado, hacemos un breve análisis de cómo resolver el problema de la agregación de información ponderada.

2.3.2 La Agregación de Información Ponderada en Contexto Difuso

Cualquier procedimiento de agregación de información ponderada conlleva la transformación de las unidades de información ponderada en base a los grados de importancia asignados [88]. La forma de realizar la transformación depende del tipo de agregación que se desarrolle.

En [79, 80] se analizó el efecto de los grados de importancia en los tipos de agregación MAX y MIN, y se sugirió una clase de funciones para transformar los grados de importancia junto con la información ponderada en ambos tipos. Para el tipo de agregación MIN se propuso una familia de t-conormas que actúan en base a la información ponderada y la negación de los grados de importancia, y que son monótonas no crecientes respecto a los grados de importancia. Para el tipo de agregación MAX se sugirió una familia de t-normas que actúan en base a la información ponderada y a los grados de importancia, y que son monótonas no decrecientes respecto a los grados de importancia.

En [88] se propuso una especificación general de los requerimientos exigibles a toda función de transformación de importancia, g. Esta función debe satisfacer las siguientes propiedades:

1. Si $a > b$ entonces $g(w, a) \geq g(w, b)$.

2. $g(w, a)$ es monótona en w.

3. $g(0, a) =$ ID.

4. $g(1, a) = a$.

Asumiendo que:

- los argumentos a, $b \in [0, 1]$ expresan el grado de satisfacción con respecto a algún criterio,

- $w \in [0, 1]$ es el grado de importancia asociado al criterio, e

- *"ID"* es el "elemento identidad", de manera que si se añade en el proceso de agregación no altera el resultado final.

La condición uno significa que cualquier función, g, debe ser monótona no decreciente con respecto al segundo argumento, es decir, que si el grado de satisfacción con respecto al criterio se incrementa entonces el grado de satisfacción transformado resultante no debería de disminuir. La segunda condición se puede considerarse como un requerimiento de cara a que el efecto del grado de importancia, w, sea consistente. No se especifica si g debe ser monótona no creciente o no decreciente con respecto al primer argumento, pero debe de satisfacer alguna de estas propiedades. A partir de las condiciones tercera y cuarta se determina cuál de ellas se verifica. Si $a >$ID, la función $g(w, a)$ es monótona no decreciente en w, y si $a <$ID, entonces es monótona no creciente. La condición tercera impone la restricción de que un grado de importancia nulo no debe afectar a los procesos de agregación. La condición final es en esencia una condición límite, que establece la asunción de que cuando tenemos todos los grados de importancia con valor 1, el resultado es el mismo que si no los consideraramos [88].

En base a estas ideas, en los próximos apartados presentamos tres operadores de agregación de información lingüística ponderada lingüísticamente, estableciendo claramente en cada uno de ellos:

- qué operador usamos para agregar los grados de importancia,
- qué operador elegimos para agregar la información lingüística ponderada lingüísticamente, y
- qué función de transformación de importancia aplicamos.

Además, con vistas a dar alguna prueba de la racionalidad de sus formas de agregar, en el apartado final presentamos algunas de las propiedades y axiomas que verifican.

2.3.3 Definición de los Operadores Disyuntivo DLP y Conjuntivo CLP

Ambos operadores se basan en la generalizaciones canónicas de la disyunción y conjunción de objetivos difusos, definidas por Dubois y Prade en el área de Teoría de Posibilidad [23, 24].

El operador Disyuntivo de agregación de información Lingüística Ponderada lingüísticamente DLP se caracteriza por:

1. Operador de agregación de grados de importancia: el operador LOWA guiado por mayoría difusa.
2. Operador de agregación de información ponderada: agregación lingüística tipo MAX.
3. Función de transformación de importancia: $g = MIN(w, a)$.

Definición 2.3.1 *La agregación del conjunto de opiniones de un grupo de individuos heterogéneo sobre una alternativa x_j, $\{(c_1, a_1), \ldots, (c_m, a_m,)\}$, expresadas lingüísticamente, $a_i \in S$, y ponderadas lingüísticamente, $c_i \in V$, de acuerdo al operador disyuntivo DLP, se define como*

$$(c_E, a_E) = DLP[(c_1, a_1), \ldots, (c_m, a_m)],$$

donde la opinión social del grupo, a_E, se obtiene como

$$a_E = MAX_{i=1,\ldots,m}\ MIN(c_i, a_i),$$

y el grado de importancia de la opinión social del grupo, c_E, se obtine como

$$c_E = \phi_{Q^1}(c_1, \ldots, c_m).$$

El operador Conjuntivo de agregación de información Lingüística Ponderada lingüísticamente CLP se caracteriza por:

1. Operador de agregación de grados de importancia: el operador LOWA guiado por mayoría difusa.
2. Operador de agregación de información ponderada: agregación lingüística tipo MIN.
3. Función de transformación de importancia: $g = MAX(NEG(w), a)$.

Definición 2.3.2 *La agregación del conjunto de opiniones de un grupo de individuos heterogéneo sobre una alternativa x_j, $\{(c_1, a_1), \ldots, (c_m, a_m,)\}$, $a_i \in S$ y $c_i \in V$, conforme al operador conjuntivo CLP, se define como*

$$(c_E, a_E) = CLP[(c_1, a_1), \ldots, (c_m, a_m)],$$

donde la opinión social del grupo, a_E, se obtiene como

$$a_E = MIN_{i=1,\ldots,m}\ MAX(NEG(c_i), a_i),$$

y el grado de importancia de la opinión social del grupo, c_E, se obtine como

$$c_E = \phi_{Q^1}(c_1, \ldots, c_m).$$

Nota. Es importante destacar que ambas definiciones requieren siempre la condición $S = V$, es decir, que el conjunto de etiquetas usado para evaluar las opiniones sea el mismo que usemos para evaluar los grados de importancia, o viceversa.

En la definición del operador disyuntivo DLP la función de transformación de importancia es la función MIN, es decir, una de las t-normas propuestas en [79, 80] para el operador de agregación tipo MAX, pero definida lingüísticamente. Algo similar ocurre en la definición del operador conjuntivo CLP . En ambos operadores es posible coger cualquier otro operador de aquellos propuestos en [79, 80], pero siempre definido lingüísticamente. En cualquier caso, en ambos operadores se pretende reducir el efecto de los elementos con bajos grados de importancia. Para ello, en el primero los elementos con baja importancia se transforman en valores pequeños, y en el segundo en valores grandes.

Por otro lado, ya que c_i expresa el grado de importancia o repercusión que la opinión de un individuo, e_i, puede alcanzar sobre la opinión global, entonces:

- cuando $c_i = s_T$, la opinión del individuo e_i tiene una influencia directa sobre la aceptación (o el rechazo) de la alternativa x_j.
- cuando $c_i = s_0$, la opinión del individuo e_i no tiene ninguna influencia sobre la aceptación (o el rechazo) de la alternativa x_j.

Como el operador LOWA, ϕ_{Q^1}, es un operador "orand", el grado de importancia de la opinión social del grupo, c_E, verifica la siguiente relación

$$\mathrm{MIN}(c_1, c_2, \ldots, c_m) \;\leq\; c_E \;\leq\; \mathrm{MAX}(c_1, c_2, \ldots, c_m).$$

2.3.4 Definición del Operador Promedio PLP

El operador Promedio de agregación de información Lingüística Ponderada lingüísticamente PLP se basa en la combinación de los operadores LOWA e I-LOWA con varias funciones de conjunción lingüísticas ($LC^{\rightarrow}$) y varias funciones de implicación lingüísticas ($LI^{\rightarrow}$), respectivamente. Además, nosotros usamos concretamente los operadores LOWA, ϕ_{Q^1}, e I-LOWA, $\phi^I_{Q^1}$, y por tanto, el operador PLP se puede decir que es un tipo de operador de agregación ponderado guiado por mayoría difusa.

El operador promedio PLP se caracteriza por:

1. Operador de agregación de grados de importancia: el operador LOWA guiado por mayoría difusa.

2. Operador de agregación de información ponderada: el operador LOWA o el I-LOWA.

3. Función de transformación de importancia:

$$g_{(\text{LOWA})} = LC^{\rightarrow}(w, a) \text{ o } g_{(\text{I-LOWA})} = LI^{\rightarrow}(w, a).$$

Asumiendo, como antes, que $S = V$, y siendo $LC^{\rightarrow}$ y $LI^{\rightarrow}$ las siguientes familias de conectivos:

1. Funciones de conjunción lingüísticas ($LC^{\rightarrow}$)

   La funciones de conjunción lingüísticas que utilizamos son las siguientes t-normas, propuestas en [29], las cuales son monótonas no crecientes con respecto a los grados de importancia y satisfacen las propiedades requeridas a toda función de transformación de importancia g:

   (a) *El operador clásico MIN ($LC_1^{\rightarrow}$):*

   $$LC_1^{\rightarrow}(w, a) = MIN(w, a).$$

   (b) *El operador de conjunción fuerte ($LC_2^{\rightarrow}$):*

   $$LC_2^{\rightarrow}(w, a) = \begin{cases} MIN(a, w) & \text{si } w > NEG(a) \\ s_0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

   (c) *El operador de conjunción débil ($LC_3^{\rightarrow}$)*:

   $$LC_3^{\rightarrow}(w, a) = \begin{cases} MIN(w, a) & \text{si } MAX(w, a) = s_T \\ s_0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

2. Funciones de implicación lingüísticas ($LI^{\rightarrow}$)

   Las funciones de implicación lingüísticas que utilizamos son algunas de las propuestas en [29]. Se caracterizan por ser monótonas no decrecientes con respecto a los grados de importancia, y como las anteriores, satisfacen las propiedades requeridas a toda función de transformación de importancia g:

   (a) *Función de implicación de Kleene-Dienes ($LI_1^{\rightarrow}$):*

   $$LI_1^{\rightarrow}(w, a) = MAX(NEG(w), a).$$

(b) *Función de implicación de Gödel ($LI_2^{\rightarrow}$):*

$$LI_2^{\rightarrow}(w,a) = \begin{cases} s_T & \text{si } w \leq a \\ a & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(c) *Función de implicación de Fodor ($LI_3^{\rightarrow}$):*

$$LI_3^{\rightarrow}(w,a) = \begin{cases} s_T & \text{si } w \leq a \\ MAX(NEG(w),a) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Definición 2.3.3 *La agregación del conjunto de opiniones de un grupo de individuos heterogéneo sobre una alternativa x_j, $\{(c_1,a_1),\ldots,(c_m,a_m,)\}$, $a_i \in S$ y $c_i \in V$, mediante el operador promedio PLP, se define como*

$$(c_E,a_E) = PLP[(c_1,a_1),\ldots,(c_m,a_m)],$$

donde el grado de importancia de la opinión social del grupo, c_E, se obtine como

$$c_E = \phi_{Q^1}(c_1,\ldots,c_m),$$

y la opinión social del grupo, a_E, se obtiene como

$$a_E = h[g(c_1,a_1),\ldots,g(c_m,a_m)],$$

tal que

- $h \in \{\phi_{Q^1}, \phi^I_{Q^1}\}$,
- $g \in \{LC_1^{\rightarrow}, LC_2^{\rightarrow}, LC_3^{\rightarrow}\}$ *si* $h = \phi_{Q^1}$,
- $g \in \{LI_1^{\rightarrow}, LI_2^{\rightarrow}, LI_3^{\rightarrow}\}$ *si* $h = \phi^I_{Q^1}$.

Nota. Siguiendo la propuesta de funciones de transformación de importancia asignadas para la agregación de tipo MIN en [79, 80], cuando el operador de agregación h es el operador I-LOWA, dado que éste es un operador que presenta características propias de los operadores de tipo MIN (como vimos en el apartado 2.2.2), entonces la función de transformación de importancia elegida pertenece a la familia de funciones de implicación lingüísticas. De igual modo, basándonos en [79, 80], cuando h es el operador LOWA hemos hecho una elección similar.

Lema 2.3.4 *El operador disyuntivo DLP es un tipo particular de operador promedio PLP.*

Demostración.

Supongamos que tenemos un grupo de m individuos. Si cogemos el cuantificador lingüístico difuso creciente de la figura 2.3, Q^1_m, "al menos m", el operador LOWA, $\phi_{Q^1_m}$, como operador de agregación de información lingüística, h, y la siguiente función de conjunción lingüística como función de transformación de importancia, g,

$$LC_1^{\rightarrow}(w,a) = \mathrm{MIN}(w,a),$$

entonces, dado que el vector de ponderación es $W = [w_1 = 1, w_2 = 0, \ldots, w_m = 0]$, tenemos que la opinión social del grupo, a_E, verifica esta relación

$$a_E = \phi_{Q^1_m}[\mathrm{MIN}(c_1,a_1), \ldots, \mathrm{MIN}(c_m,a_m)] =$$

$$\mathrm{MAX}_{i=1,\ldots,m}\ \mathrm{MIN}(c_i,a_i),$$

y por tanto se satisface el lema

$$PLP[(c_1,a_1),\ldots,(c_m,a_m)] = DLP[(c_1,a_1),\ldots,(c_m,a_m)].$$

$\square$

Lema 2.3.5 *El operador conjuntivo CLP es un tipo particular de operador promedio PLP.*

Demostración.

Asumiendo el mismo cuantificador que antes, si tomamos como operador de agregación de información lingüística, h, el operador I-LOWA, $\phi^I_{Q^1_m}$, y la siguiente función de implicación lingüística como función de transformación de importancia, g,

$$LI^{\rightarrow}(w,a) = \mathrm{MAX}(NEG(w),a),$$

entonces como el vector de ponderación es $W = [w_1 = 1, w_2 = 0, \ldots, w_m = 0]$, tenemos que la opinión social del grupo, a_E, verifica esta relación

$$a_E = \phi^I_{Q^1_m}[\mathrm{MAX}(NEG(c_1), a_1), \ldots, \mathrm{MAX}(NEG(c_m), a_m)] =$$

$$\mathrm{MIN}_{i=1,\ldots,m}\ \mathrm{MAX}(NEG(c_i), a_i),$$

y por tanto el lema se satisface,

$$PLP[(c_1, a_1), \ldots, (c_m, a_m)] = CLP[(c_1, a_1), \ldots, (c_m, a_m)].$$

□

Por tanto el operador promedio PLP , elegidos cuantificadores y funciones de transformación adecuados, generaliza a los operadores DLP y CLP .

En los próximos apartados intentamos dar algunas evidencias de que todos estos operadores de agregación de información ponderada propuestos, combinan acertadamente la información lingüística ponderada, de semejante manera, que la información agregada resultante es la mejor representación del conjunto de informaciones individuales. Para ello, hacemos un breve estudio de sus propiedades así como de la axiomática que los caracteriza.

2.3.5 Propiedades de los Operadores Disyuntivo DLP, Conjuntivo CLP y Promedio PLP

Dado que de acuerdo con los lemas 2.3.4 y 2.3.5, el operador PLP generaliza a los operadores DLP y CLP, analizaremos sólo las propiedades de éste.

Teorema 2.3.6 *El operador promedio PLP es* **monótono creciente** *respecto a los valores de las opiniones ponderadas, en el sentido de que si tenemos unos conjuntos de opiniones ponderadas* $A = [(c_1, a_1), (c_2, a_2), \ldots, (c_m, a_m)]$, *y* $B = [(c_1, b_1), (c_2, b_2), \ldots, (c_m, b_m)]$, *de modo que,* $\forall\ j,\ a_j \geq bj$, *entonces si*

$$(c_E, a_E) = PLP[A] \ y \ (c_E, b_E) = PLP[B],$$

se satisface esta relación.

$$a_E \ \geq \ b_E.$$

Demostración.

Es una consecuencia de la propiedad de monotonía creciente que caracteriza al operador LOWA. □

Teorema 2.3.7 *El operador promedio PLP es* **conmutativo***, es decir,*

$$PLP[(c_1, a_1), (c_2, a_2), \ldots, (c_m, a_m)] \ = \ PLP[(\pi((c_1, a_1)), \pi((c_2, a_2)), \ldots, \pi((c_m, a_m))]$$

donde π es una permutación definida sobre el conjunto de opiniones ponderadas.

Demostración.

Claramente esta propiedad es consecuencia de la propiedad conmutativa del operador LOWA. □

Teorema 2.3.8 *El operador PLP es un operador* **"orand"***, en el siguiente sentido: para cualquier conjunto de opiniones ponderadas $\{(c_1, a_1), \ldots, (c_m, a_m)\}$, la opinión social ponderada, (c_E, a_E), obtenida de acuerdo a esta expresión*

$$(c_E, a_E) = PLP[(c_1, a_1), \ldots, (c_m, a_m)]$$

satisface estas relaciones:

1. $MIN(a_1, \ldots, a_m, c_1, \ldots, c_m) \ \leq \ a_E \ \leq \ MAX(a_1, \ldots, a_m, c_1, \ldots, c_m)$, *y*

2. $MIN(c_1, \ldots, c_m) \ \leq \ c_E \ \leq \ MAX(c_1, \ldots, c_m)$.

Demostración.

Esta propiedad también es una consecuencia de la propiedad de ser un operador "orand" que posee el operador LOWA vista en el apartado 2.2.4. □

En conclusión, como se esperaba, el operador PLP satisface las misma propiedades del operador de agregación de información lingüística no ponderada LOWA.

2.3.6 Axiomática de los Operadores Disyuntivo DLP, Conjuntivo CLP y Promedio PLP

La caracterización de los operadores de agregación de información ponderada no es tarea fácil. Son pocos los trabajos desarrollados en este área. Entre ellos, destacan los trabajos de Cholewa [19], Montero [61] y Dubois y Koning [26], desarrollados en un contexto difuso numérico. En [19] se ofrece una colección de axiomas para caracterizar las agregaciones ponderadas, y se propone la media aritmética ponderada como un operador de agregación de información ponderada típico que los satisface. En [61] se caracteriza la regla de mayoría difusa y se estudia la existencia de grupos absolutamente decisivos. En [26] se analizan brevemente las diferentes aproximaciones axiomáticas existentes para las agregaciones ponderadas.

Como hemos apuntado, en [19] se presenta un conjunto completo de axiomas para las agregaciones realizadas en grupos heterogéneos. Algunos de ellos son: independencia de las alternativas, conmutatividad, ... Obviamente, un determinado operador no tiene porqué satisfacer todos los axiomas propuestos allí, sino que debe verificar aquellos que su situación especial de aplicación precise. En lo que sigue, se postula una aproximación axiomática para operadores de agregación de información ponderada con ocho axiomas, de los cuales los axiomas I,II,III,IV,V, se obtienen directamente de aquellos propuestos por Cholewa en [19], pero definidos lingüísticamente, y el resto son tomados de las axiomáticas para operadores de agregación de información lingüística no ponderada. Igual que en el apartado anterior, dado que el operador PLP generaliza a los operadores DLP y CLP, chequearemos sólo su axiomática, y en el caso en que un axioma no se satisfaga, estudiaremos si ocurre lo mismo para los otros dos.

- **Axioma I:** *Independencia de las Alternativas* $x_i \in X$. La opinión colectiva, a_E, obtenida para una alternativa x_i, sólo depende de las opiniones individuales ponderadas, $[(c_1, a_1), \ldots, (c_m, a_m)]$, dadas sobre esa alternativa x_i, y el grado de importancia colectivo, c_E, sólo depende de los grados de importancia individuales de las opiniones $[c_1, \ldots, c_m]$. Esto significa que existen unas funciones h' y g',

$$h' : (S\text{x}S)^m \rightarrow S, \quad g' : S^m \rightarrow S,$$

para agregar las opiniones lingüísticas ponderadas y los grados de importancia de las opiniones agregadas, respectivamente, de modo que se satisface la siguientes relación

$$(a_E, c_E) = (h'[(c_1, a_1), \ldots, (c_m, a_m)], g'[c_1, \ldots, c_m]).$$

Este axioma es básicamente técnico y claramente el operador promedio PLP lo satisface, siendo el operador LOWA la función g', y la composición del operador I-LOWA con el operador de implicación lingüístico ($LI^{\rightarrow}$) o la composición del LOWA con la función de conjunción lingüística ($LC^{\rightarrow}$) la función h'.

Nota. De igual modo, como dijimos en el apartado dedicado al estudio de la axiomática del LOWA, este axioma no es aplicable cuando usamos relaciones de preferencia para expresar las opiniones sobre las alternativas.

- **Axioma II**: *Asociatividad.* Entendida como que sea posible dividir al conjunto de opiniones individuales ponderadas en subconjuntos disjuntos, obtener una opinión colectiva ponderada para cada subconjunto, y la opinión colectiva ponderada global a partir de opiniones colectivas de cada subconjunto. Es decir que se satisfaga la siguiente relación,

$$PLP[(c_1, a_1), \ldots, (c_m, a_m)] = PLP[PLP[(c_1, a_1), \ldots, (c_{m-1}, a_{m-1})], (c_m, a_m)].$$

  El operador PLP no satisface este axioma, porque ni el operador I-LOWA ni el LOWA son asociativos como vimos en el apartado 2.2.5.

- **Axioma III**: *Casi Equivalencia e Incremento del Grado de Importancia Colectivo.* Si todos los individuos están de acuerdo en su opinión, es decir, si $a_1 = a_2 = \ldots = a_m = a$, entonces la opinión colectiva ponderada, (c_E, a_E), obtenida como

$$(c_E, a_E) = PLP[(c_1, a), \ldots, (c_m, a)],$$

  debe satisfacer las siguientes condiciones:

  1. $a_E = a$ (casi equivalencia o unanimidad), y
  2. $c_E > \mathrm{MAX}(c_1, \ldots, c_m)$ (incremento del grado de importancia colectivo).

El operador PLP no satisface este axioma. Veamos un ejemplo donde se violan las condiciones del axioma.

– *El operador PLP no es casi equivalente.* Por ejemplo, supongamos un conjunto de nueve etiquetas para expresar las opiniones y los grados de importancia. Entonces, si se quiere agregar las siguientes opiniones lingüísticas ponderadas de dos individuos, $[(s_0, s_6), (s_1, s_6)]$, tomando el cuantificador lingüístico difuso, Q_2^1, "al menos dos", para calcular el vector de ponderación $W = [1, 0]$, tenemos,

  caso 1: si $h = \phi^I_{Q_2^1}$ y $g = LI_1^{\rightarrow}(w, a) = MAX(NEG(w), a)$, entonces

$$\phi^I_{Q_2^1}(\mathrm{MAX}(NEG(s_0), s_6), \mathrm{MAX}(NEG(s_1), s_6)) = s_7 \ \neq \ s_6,$$

  caso 2: y si $h = \phi_{Q_2^1}$ y $g = LC_1^{\rightarrow}(w, a) = MIN(w, a)$,

$$\phi_{Q_2^1}(MIN(s_0, s_6), MIN(s_1, s_6)) = s_1 \ \neq \ s_6.$$

  Ya que en este ejemplo hemos trabajado con el operador PLP cuando actúa como los operadores DLP y CLP, se deduce que éstos tampoco satisfacen está condición, y por tanto no satisfacen el axioma.

– *El operador PLP no verifica el incremento del grado de importancia colectivo.* Esto es una consecuencia de la propiedad del operador LOWA de ser un operador "orand", y por tanto,

$$\mathrm{MIN}(c_1, \ldots, c_m) \ \leq \ c_E \ \leq \ \mathrm{MAX}(c_1, \ldots, c_m).$$

- **Axiom IV**: *Sensibilidad Positiva en su Forma Más Fuerte.* Una opinión colectiva ponderada se incrementa si y sólo si cualquier opinión individual ponderada se incrementa. Esto significa que si tenemos dos opiniones sociales ponderadas, (a_E, c_E) y (c_E, b_E) obtenidas como

$$(c_E, a_E) = PLP[(c_1, a_1), \ldots, (c_m, a_m)],$$

y

$$(c_E, b_E) = PLP[(c_1, b_1), \ldots, (c_m, b_m)],$$

con $a_j \ \geq \ b_j$, entonces

$$a_E > b_E \text{ si y sólo si } \exists e_k \in E \text{ tal que } a_k > b_k.$$

El operador PLP no verifica este axioma. Por ejemplo, supongamos que tenemos un conjunto de ocho etiquetas para expresar las opiniones y los grados de importancia. Sean $[(s_1, s_4), (s_2, s_5)]$ dos opiniones ponderadas a agregar. Considerando el cuantificador , Q_2^1, "al menos dos", para calcular el vector de ponderación $W = [1, 0]$ entonces,

caso 1: si $h = \phi^I_{Q_2^1}$ y $g = LI_1^{\rightarrow}(w, a) = MAX(NEG(w), a)$, entonces

$$(c_E, a_E) = PLP[(s_1, s_4), (s_2, s_5)] = (s_2, s_5),$$

caso 2: y si $h = \phi_{Q_2^1}$ y $g = LC_1^{\rightarrow} = MIN(w, a)$, entonces

$$(c_E, a_E) = PLP[(s_1, s_4), (s_2, s_5)] = (s_2, s_2).$$

Ahora bien, si el primer individuo cambia su opinión por (s_1, s_5), entonces

caso 1: $(c_E, b_E) = PLP[(s_1, s_5), (s_2, s_5)] = (s_2, s_5)$,

caso 2: $(c_E, b_E) = PLP[(s_1, s_5), (s_2, s_5)] = (s_2, s_2)$,

y por tanto, aunque la opinión de un individuo se incremente, sin embargo, la opinión colectiva no se incrementa, independientemente del operador de agregación considerado en el operador PLP. Además en base al ejemplo escogido, podemos deducir que los operadores DLP y CLP tampoco satisfacen este axioma.

- **Axioma V**: *Neutralidad del Complemento.* Si $(c_j, a_j)^c$ es la opinión ponderada complementaria de la opinión ponderada de (c_j, a_j), de modo que $(c_j, a_j)^c = (c_j, NEG(a_j))$, entonces, se tiene que satisfacer esta relación

$$(PLP[(c_1, a), \ldots, (c_m, a)])^c = PLP[(c_1, a_1)^c, \ldots, (c_m, a_m)^c].$$

El operador PLP no satisface este axioma. Por ejemplo, consideremos un conjunto de ocho etiquetas para expresar las opiniones. Sean $[(s_4, s_6), (s_1, s_5)]$ las opiniones ponderadas a ser agregadas. Sus opiniones ponderadas complementarias son $[(s_4, s_1), (s_1, s_2)]$. Entonces, tomando el cuantificador lingüístico difuso, Q_8^1, "al menos ocho", el vector de ponderación es $W = [1, 0]$ y entonces,

caso 1: si $h = \phi^{I}_{Q_8^1}$ y $g = LI_1^{\rightarrow}(w,a) = MAX(NEG(w),a)$, entonces

$$(c_E, a_E) = PLP[(s_4,s_6),(s_1,s_5)]^c = (s_4,s_6) \neq (s_4,s_3) = PLP[(s_4,s_1),(s_1,s_2)],$$

caso 2: y si $h = \phi_{Q_8^1}$ y $g = LC_1^{\rightarrow}(w,a) = MIN(w,a)$, entonces

$$(c_E, a_E) = PLP[(s_4,s_6),(s_1,s_5)]^c = (s_4,s_4) \neq (s_4,s_1) = PLP[(s_4,s_1),(s_1,s_2)].$$

Por tanto, se desprende que los operadores DLP y CLP tampoco satisfacen este axioma.

- **Axioma VI:** *Sensibilidad Positiva en su Forma Más Débil.* Si un individuo e_j incrementa su opinión ponderada sobre una alternativa x_i entonces la opinión colectiva ponderada sobre esa alternativa x_i no puede disminuir. Es decir, si un individuo altera su opinión ponderada de (c_j, a_j) a (c_j, b_j), de modo que $a_j \leq b_j$, entonces si

$$(c_E, a_E) = PLP[(c_1,a_1),\ldots,(c_j,a_j),\ldots,(c_m,a_m)],$$

y

$$(c_E, b_E) = PLP[(c_1,a_1),\ldots,(c_j,b_j),\ldots,(c_m,a_m)],$$

se satisface la siguiente relación

$$a_E \leq b_E.$$

Obviamente el operador PLP satisface este axioma, ya que es una consecuencia de la su propiedad de ser monótono creciente (teorema 2.3.6).

- **Axioma VII:** *Neutralidad con Respecto a las Alternativas.* Si tenemos dos alternativas x_i y x_k, y los respectivos conjuntos de opiniones ponderadas,$[(c_1,a_1),\ldots,(c_m,a_m)]$ y $[(c_1,a'_1),\ldots,(c_m,a'_m)]$, tal que $a_j = a'_j$, $\forall e_j$ entonces

$$PLP[(c_1,a_1),\ldots,(c_m,a_m)] = PLP[(c_1,a'_1),\ldots,(c_m,a'_m)].$$

Claramente, también lo satisface el operador PLP.

- **Axioma VIII:** *Dominio No Restringido.* Considerando cualquier alternativa x_i, para cualquier conjunto de opiniones individuales ponderadas $[(a_1,c_1),\ldots,(a_m,c_m)]$, hay una opinión colectiva ponderada, (a_E,c_E),tal que

$$(c_E, a_E) = PLP[(c_1,a_1),\ldots,(c_m,a_m)].$$

Se satisface claramente con sólo observar la definición del operador PLP.

En conclusión, hemos demostrado que los operadores disyuntivo DLP, conjuntivo CLP y promedio PLP tienen una forma de agregar aceptable y racional ya que:

- por un lado, como vimos en el apartado 2.3.5, verifican dos de las propiedades fundamentales que todo operador de agregación bueno debe satisfacer, o sea, son monótonos crecientes y conmutativos;
- y por otro, como hemos visto en este apartado, verifican algunos de los axiomas o criterios racionales exigidos a un operador de agregación aceptable: independencia de las alternativas, sensibilidad positiva en su forma débil, neutralidad con respecto a las alternativas, y dominio no restringido.

Capítulo 3

Modelos Lingüísticos para Alcanzar el Consenso en Problemas de TDG

En este capítulo, abordamos el problema de como alcanzar el consenso en problemas de TDG en contexto lingüístico.

Primero hacemos un breve estudio de los modelos de consenso existentes en la literatura. Posteriormente, en la sección segunda, presentamos la arquitectura de los modelos de consenso que proponemos en esta memoria, la cual contempla dos tipos diferentes de medidas de consenso:

- Grados de consenso lingüísticos, para estudiar el estado de consenso del grupo de individuos sobre el conjunto de alternativas.
- Proximidades lingüísticas, para estudiar el estado de acuerdo de cada individuo con el resto.

Dado que asumimos que los individuos expresan sus preferencias mediante relaciones de preferencia lingüísticas, proponemos tres niveles de opinión donde evaluar las distintas medidas de consenso: nivel de pares de alternativas, nivel de las alternativas, y nivel de la relación. Por tanto, todos los modelos de consenso presentan estas seis medidas de consenso: grado de consenso lingüístico en los pares de alternativas, grado de consenso lingüístico en las alternativas, grado de consenso lingüístico en la relación, proximidad lingüística en los pares de alternativas, proximidad lingüística en las alternativas, y proximidad lingüística en la relación.

En la sección tercera analizamos los distintos esquemas de obtención de las medidas de consenso. Dado que todas las medidas de consenso se basan en el concepto de coincidencia entre opiniones, se proponen dos esquemas de obtención de las medidas, uno basado en una idea rígida y flexible de coincidencia, y otro que es una nueva caracterización difusa del concepto de coincidencia, llamada "coincidencia difusa".

En base a estos esquemas, en las siguientes tres secciones presentamos tres modelos de consenso lingüísticos. Los dos primeros basados en el primer esquema, y el tercero en el segundo:

- Modelo de consenso lingüístico guiado por medidas de consenso lingüísticas promedio. Calcula las medidas de consenso en base a una política de coincidencia promedio, de acuerdo con la cual, las medidas de consenso se obtienen a partir de todos los grupos de individuos que coinciden en sus opiniones.

- Modelo de consenso lingüístico guiado por medidas de consenso lingüísticas maximales. En este caso, las medidas de consenso se hallan en base a una política de coincidencia maximal, lo que significa que las medidas de consenso se obtienen a partir de los grupos de individuos mayoritarios que coinciden en sus opiniones.

- Modelo de consenso lingüístico guiado por medidas de consenso lingüísticas basadas en coincidencia difusa. Este modelo define las medidas de consenso en base a una nueva caracterización del concepto de coincidencia, llamado coincidencia difusa. La coincidencia difusa se define, en cada nivel de opinión, como un subconjunto difuso del conjunto de pares de individuos a partir de la proximidad o acuerdo observado en sus respectivas opiniones. De acuerdo con ella, las medidas de consenso en cada nivel de opinión se obtienen a partir de la coincidencia difusa observada en ese nivel.

Finalmente, como complemento a nuestros modelos de consenso lingüísticos, y en vista de que el problema de la inconsistencia es también una cuestión a resolver en toda situación de TDG, presentamos un modelo de consenso lingüístico racional. Este modelo propone guiar los procesos de consenso no sólo con medidas de consenso, sino también con medidas de consistencia, que permitan eliminar las inconsistencia de las opiniones de los individuos al mismo tiempo que se mejora el consenso entre los individuos. Se presentan dos tipos de medidas de consistencia lingüísticas, dependiendo del nivel de evaluación de la consistencia, nivel de individuo y nivel de grupo de individuos:

- Medidas de consistencia lingüísticas individuales, para estudiar el estado de coherencia de cada individuo en sus opiniones.
- Medidas de consistencia lingüísticas colectivas, para estudiar el estado de coherencia del grupo de individuos.

Todas las medidas de consistencia se calculan en función de los ciclos de preferencia inconsistentes positivos de 3 alternativas diferentes, detectados en las relaciones de preferencia lingüísticas. Un análisis cualitativo de estos ciclos, es decir, desde la perspectiva de la naturaleza de los mismos, da lugar a dos medidas:

- Medida de consistencia lingüística individual cualitativa.
- Medida de consistencia lingüística colectiva cualitativa.

Y un análisis cuantitativo de los mismos, o sea, desde la perspectiva del número de ciclos, da lugar a otras dos medidas:

- Medida de consistencia lingüística individual cuantitativa.
- Medida de consistencia lingüística colectiva cuantitativa.

En resumen, el modelo contempla cuatro medidas de consistencia.

En general, prácticamente todas las medidas propuestas se obtienen usando el operador de agregación de información lingüística no ponderada, LOWA, guiado por cuantificadores difusos lingüísticos, representando unas veces, el concepto de mayoría difusa de individuos y otras el concepto de mayoría difusa de alternativas. Cuando se trabaja en contextos de TDG heterogéneos usamos para transformar la información lingüística ponderada alguna de las funciones conjuntivas presentadas en la sección anterior, y como operador de agregación el operador LOWA.

Por último, destacamos que aunque todos los modelos de consenso se presentan en diferentes contextos de TDG, fácilmente son trasladables de unos a otros.

3.1 Modelos de Consenso Difusos

Como se avanzaba en la sección 1.1, en los problemas de TDG son dos los procesos a desarrollar antes de obtener una solución [10]: proceso de consenso y proceso de selección. El primero, conocido también con el nombre de consenso topológico, hace referencia a cómo alcanzar el máximo grado de consenso o acuerdo entre los individuos sobre el conjunto de alternativa(s) solución. El segundo, conocido también con el nombre de consenso algebráico, hace referencia a cómo obtener el conjunto de alternativa(s) solución a partir de las opiniones expresadas por los individuos.

Normalmente, en el estado inicial de todo problema de TDG los individuos tienen opiniones enfrentadas o muy dispares. Por ello, en todos se hace necesario el desarrollo de un proceso de consenso antes de obtener una solución, en un intento de que ésta sea una solución consensuada. Lógicamente, el consenso entendido como un acuerdo total y unánime entre los individuos (consenso ideal) es muy difícil de lograr en la realidad, casi imposible. Por eso, lo que todos los procesos de consenso intentan es alcanzar el máximo grado de consenso posible entre los individuos, aunque éste no sea ideal. En este sentido, un proceso de consenso se entiende como un proceso dinámico e iterativo, coordinado por un moderador, el cual ayuda a los individuos a acercar lo más posible sus posicionamientos. En cada paso del mismo, el moderador conoce el estado de consenso existente entre los individuos, a través de una medida de consenso, que establece la distancia al estado de consenso ideal. Si considera que el estado de consenso no es aceptable, es decir, si aún existe mucha discrepancia entre los individuos, insta a los mismos a que aproximen sus posiciones. Cuando considera que es aceptable, o sea, cuando las opiniones de los individuos están lo suficientemente próximas, como para ser consideradas opiniones de consenso, da carta blanca para que la solución al problema sea obtenida en el proceso de selección. Este modelo de consenso se muestra en la figura 3.1.

Como hemos mencionado, los procesos de consenso son guiados mediante una medida de consenso. En un principio, los modelos de consenso difusos propuestos contenían medidas de consenso absolutas, en el sentido de que distinguían entre los valores 1 (estado de total consenso o acuerdo) y 0 (estado de no consenso o acuerdo parcial) [5, 6, 69, 70]. Sin

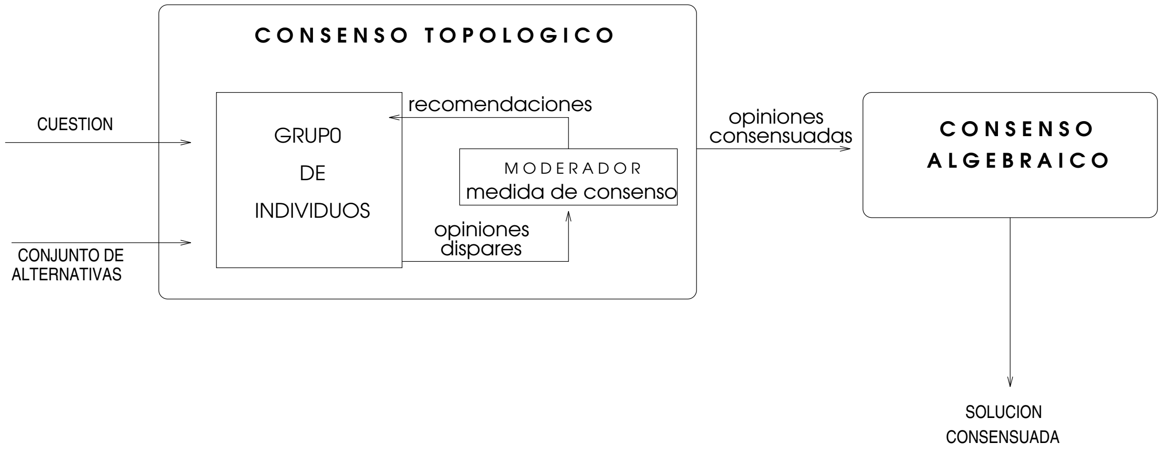

Figura 3.1. Modelo de Consenso para TDG

embargo, este tipo de medida no es nada realista, ya que las situaciones de total acuerdo son muy difíciles de alcanzar, y como consecuencia, cualquier proceso de consenso se hace eterno y muy laborioso. Posteriormente, en [48] se propuso un modelo de consenso difuso más realista, basado en medidas de consenso relativas, en el sentido de que distinguía entre los valores 1, 0 y (0,1), reflejando el intervalo (0,1) el amplio espectro de estados de consenso o acuerdo parciales posibles. Con este tipo de medida los procesos de consenso se adecúan más a la realidad, es decir, persiguen alcanzar un amplio grado de consenso o acuerdo entre los individuos (no siempre unánime), lo más próximo al estado de consenso ideal.

En esta línea de razonamiento, se propusieron varias medidas de consenso en distintos contextos difusos, asumiendo que los individuos expresan sus opiniones mediante valores en el intervalo [0,1] (contexto difuso numérico) [28, 48, 49, 50], y asumiendo etiquetas lingüística para expresar las opiniones (contexto difuso lingüístico) [8, 27, 55]. En todos los casos, los autores han basado la definición de sus medidas de consenso en el concepto de coincidencia, es decir, las medidas se obtienen a partir de la coincidencia exitente entre las opiniones de los individuos. No obstante, todos no han aplicado la misma idea de coincidencia. Unos han optado por una coincidencia rígida, es decir, en el momento de evaluar la coincidencia entre las opiniones de dos individuos, aceptan sólo dos posibilidades, o total coincidencia (valor 1) o coincidencia nula (valor 0) [48, 49, 50, 28, 55], y otros por una coincidencia flexible, aceptan además que entre dos individuos pueden existir diferentes grados de coincidencia (valores en [0,1]) [48, 49, 50, 28, 27, 8]. Con vista a clarificar más los modelos de consenso que presentamos en esta sección, en el siguiente apartado, hacemos un breve estudio de todas estas medidas de consenso.

3.1.1 Medidas de Consenso Relativas Difusas

En un contexto difuso numérico, en [48] se presentaron tres medidas de consenso numéricas, las cuales están:

- evaluadas en el intervalo [0,1];
- desarrolladas en problemas de TDG homogéneos con conjuntos de alternativas homogéneos;
- calculadas sobre el conjunto global de alternativas en un proceso de fusión jerárquico desarrollado a partir de las opiniones de los individuos, representadas por relaciones de preferencia numéricas, y usando el concepto de mayoría difusa representado por cuantificadores lingüísticos difusos;
- y finalmente obtenidas: (a) la primera, usando una idea rígida del concepto de coincidencia, es decir, establecido un par de alternativas concreto, si las opiniones de dos individuos son iguales entonces hay coincidencia (valor 1), y en caso contrario, no hay coincidencia (valor 0); (b) la segunda, usando una idea flexible del concepto de coincidencia, es decir, establecido un par de alternativas concreto, si las opiniones de dos individuos son más o menos iguales de acuerdo a un grado α (establecido con anterioridad), entonces coinciden (valor 1), y en caso contrario, no coinciden (valor 0); y (c) la tercera, usando una idea aún más flexible del concepto de coincidencia, representada por una función, $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, definida a partir de la proximidad observada entre las opiniones de los individuos.

En [49, 50] se extendieron las anteriores medidas a problemas de TDG con conjuntos heterogéneos de alternativas y a problemas de TDG heterogéneos, respectivamente. En

[28] se modificaron las medidas introducidas en [49, 50] y las calcularon usando el operador OWA [81].

Por otro lado, en un contexto difuso lingüístico, en [27] se presentó una nueva medida de consenso numérica, que está:

- desarrollada en problemas de TDG homogéneos con múltiples criterios;
- calculada para cada alternativa individualmente, a partir de las opiniones de los individuos representadas por etiquetas lingüísticas (no por relaciones de preferencia), usando técnicas de aproximación lingüística [74] en base a la representación difusa de las etiquetas (funciones de pertenencia trapezoidales);
- y obtenida usando una idea flexible del concepto de coincidencia representada por una distancia euclídea, d, la cual se usa para realizar la aproximación lingüística [74].

En [55] se modificó esta medida y se obtuvo de nuevo aplicando una idea rígida del concepto de coincidencia, que divide al conjunto de individuos en subconjuntos disjuntos de acuerdo a sus evaluaciones. Finalmente, en [8] se ha presentado una medida de consenso lingüística, que está:

- evaluada en conjunto de etiquetas, S, el mismo que se use para expresar las opiniones de los individuos;
- desarrollada en un contexto de TDG lingüístico similar al nuestro, pero considerando además un conjunto heterogéneo de criterios ponderados lingüísticamente en el conjunto de etiquetas S;
- calculada para cada alternativa individualmente, a partir de las opiniones de los individuos representadas por etiquetas lingüísticas, usando una versión lingüística del operdor OWA [84] y considerando cuantificadores lingüísticos difusos;
- y obtenida usando una idea flexible del concepto de coincidencia representada por una función de distancia normal, d, definida directamente sobre S.

3.2 Arquitectura de los Modelos de Consenso Lingüísticos

Asumiendo que trabajamos con problemas de TDG en contexto lingüístico, donde los individuos expresan sus opiniones mediante relaciones de preferencia lingüísticas, presentamos varios modelos de consenso lingüístico caracterizados por una estructura de medidas de consenso común. Ellos son guiados por dos tipos de medidas de consenso lingüísticas, una para medir el grado de consenso existente entre las opiniones de los individuos (en el sentido de las medidas de cosenso tradicionales), denominado grados de consenso, y otro para medir la cercanía entre las opiniones de los individuos particulares y la opinión colectiva del grupo, denominado proximidades lingüísticas. Por tanto los modelos de consenso que aquí consideramos se acomodan a la arquitectura que se muestra en la figura 3.2.

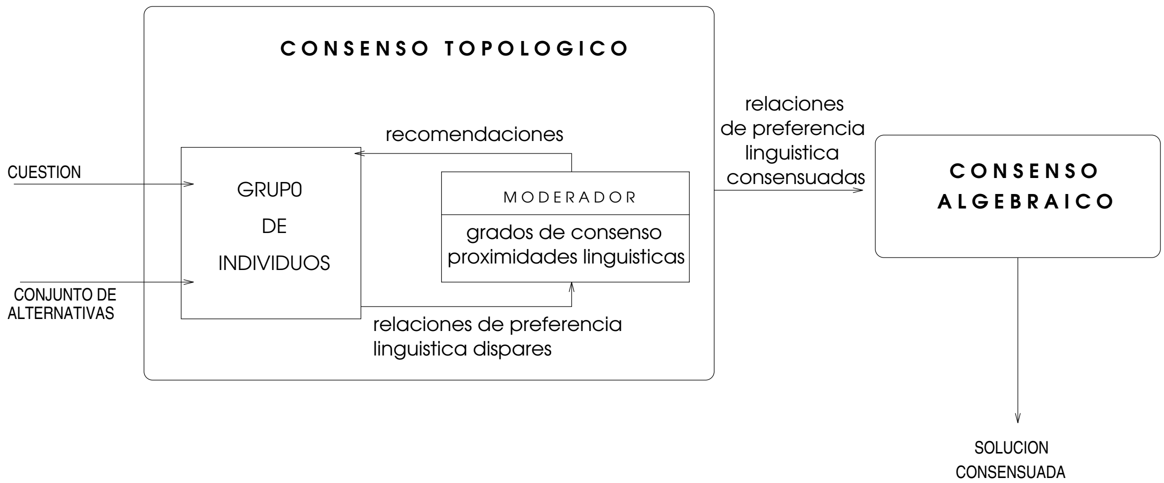

Figura 3.2. Arquitectura de los Modelos de Consensos Lingüísticos.

Las medidas consideradas evalúan el estado de consenso en tres niveles de opinión: nivel de los pares de alternativas, nivel de las alternativas particulares, y nivel de relación. Por tanto, tenemos tres grados de consenso:

1. **Grado de Consenso Lingüístico en los Pares de Alternativas:** mide el grado de consenso social existente en torno a un simple par de alternativas (x_i, x_j), en base a las opiniones vertidas por los individuos sobre él.

2. **Grado de Consenso Lingüístico en las Alternativas:** evalúa el grado de consenso social existente en torno al subconjunto de pares de alternativas determinado por una alternativa concreta, x_i, a partir de las opiniones aportadas por los individuos sobre ellos.

3. **Grado de Consenso Lingüístico en la Relación:** indica el grado de consenso social existente en torno a todo el conjunto de pares, es decir, sobre la relación P, y por tanto, en base a todas las opiniones de los individuos.

De igual modo, tenemos tres proximidades lingüísticas:

1. **Proximidad Lingüística en los Pares de Alternativas:** mide el grado de acuerdo o proximidad existente entre las opiniones dadas por un individuo particular, e_k, y el resto de los individuos, en torno a un particular par de alternativas (x_i, x_j).

2. **Proximidad Lingüística en las Alternativas:** expresa el grado de acuerdo o proximidad existente entre las opiniones aportadas por un individuo particular, e_k, y el resto de los individuos, pero en este caso, en torno al subconjunto de pares determinado por una alternativa concreta, x_i.

3. **Proximidad Lingüística en la Relación:** da el grado de acuerdo o proximidad existente entre las opiniones de un individuo particular, e_k, y el resto, en torno a todo el conjunto de pares, es decir, como ocurre en los grados, sobre la relación P.

Cada medida se define en su respectivo nivel de aplicación, y en conjunto aportan gran cantidad de información sobre el estado real de consenso, de modo que planteamos modelos de consenso más completos que los modelos de consenso tradicionales, de forma que el moderador tiene muchos más puntos de referencia para coordinar el proceso de consenso y hacer sus recomendaciones. Esta estructura de medidas se refleja en la figura 3.3.

			MEDIDAS DE CONSENSO	
			GRADOS DE CONSENSO	PROXIMIDADES LINGUISTICAS
NIVELES DE OPINION	NIVEL 1	NIVEL DE LOS PARES DE ALTERNATIVAS (Xi,Xj)	GRADO DE CONSENSO LINGUISTICO EN LOS PARES DE ALTERNATIVAS	PROXIMIDAD LINGUISTICA EN LOS PARES DE ALTERNATIVAS
	NIVEL 2	NIVEL DE LAS ALTERNATIVAS Xi	GRADO DE CONSENSO LINGUISTICO EN LAS ALTERNATIVAS	PROXIMIDAD LINGUISTICA EN LAS ALTERNATIVAS
	NIVEL 3	NIVEL DE LA RELACION P	GRADO DE CONSENSO LINGUISTICO EN LA RELACION	PROXIMIDAD LINGUISTICA EN LA RELACION

Figura 3.3. Medidas de Consenso Lingüísticas

3.3 Esquemas de Obtención de las Medidas de Consenso Lingüísticas

Las medidas de consenso que se proponen están basadas en el concepto de coincidencia. Se adoptan dos ideas diferentes del concepto de coincidencia: (i) la aplicación conjunta de las dos ideas convencionales de coincidencia, y (ii) una nueva idea de coincidencia, la coincidencia difusa.

1. *Coincidencia rígida y flexible.* La primera se aplica en primera instancia y la segunda en una fase posterior. La coincidencia rígida es la idea usual de coincidencia, es decir, valor 1 cuando dos valores coinciden y 0 en otro caso. En este caso, los valores examinadas son el valor asignado por un individuo a la preferencia sobre un par de alternativas, y uno de los posibles valores que esa preferencias puede tomar. Aplicando esta idea en el nivel de opinión de alternativas se obtienen diferentes subconjuntos de individuos que caracterizan a cada par. Posteriormente, siguiendo en el mismo nivel de opinión, a partir de las cardinalidades de estos subconjuntos se obtiene el grado de coincidencia (coincidencia flexible) que caracteriza a cada par de

alternativas, y a partir de ellos se derivan las medidas de consenso.

2. **Coincidencia difusa.** Esta es una caracterización difusa lingüística de la idea usual de coincidencia flexible. En cada nivel de opinión se define el concepto de coincidencia difusa como un subconjunto difuso del conjunto de pares de individuos, caracterizado por una función de pertenencia lingüística obtenida a partir de la distancias observadas entre las opiniones de los individuos. Esta función de pertenencia representa los distintos grados de coincidencia que se pueden detectar. Los grados de coincidencia que se pueden dar están limitados por la granularidad del conjunto de etiquetas que se use para definir la función de pertenencia. En cada nivel de opinión se obtienen los subconjuntos difusos de coincidencia y a partir de ellos se derivan las medidas de consenso.

Estos dos conceptos de coincidencia inducen dos esquemas diferentes de obtención de las medidas de consenso lingüísticas.

3.3.1 Esquema de Obtención Basado en Coincidencia Rígida y Flexible

El esquema de obtención de las medidas de consenso bajo esta perspectiva de coincidencia es un esquema secuencial, como se muestra en la figura 3.4. Está compuesto de tres procesos, los dos primeros se desarrollan en el nivel de opinión de los pares de alternativas, y el último, en sí es un proceso secuencial, desarrollado desde el nivel de opinión más bajo, el nivel de los pares de alternativas, hasta el nivel más alto, el nivel de la relación.

1. **Proceso de Agrupamiento**. Este es un proceso guiado por la idea de coincidencia rígida. Consiste en realizar el agrupamiento de los individuos en torno a los valores que han asignado a cada par de alternativas. Aplicando el concepto de coincidencia rígida, a partir de las relaciones de preferencia lingüística, el conjunto de individuos se divide en subconjuntos disjuntos de acuerdo a las coincidencias observadas en los

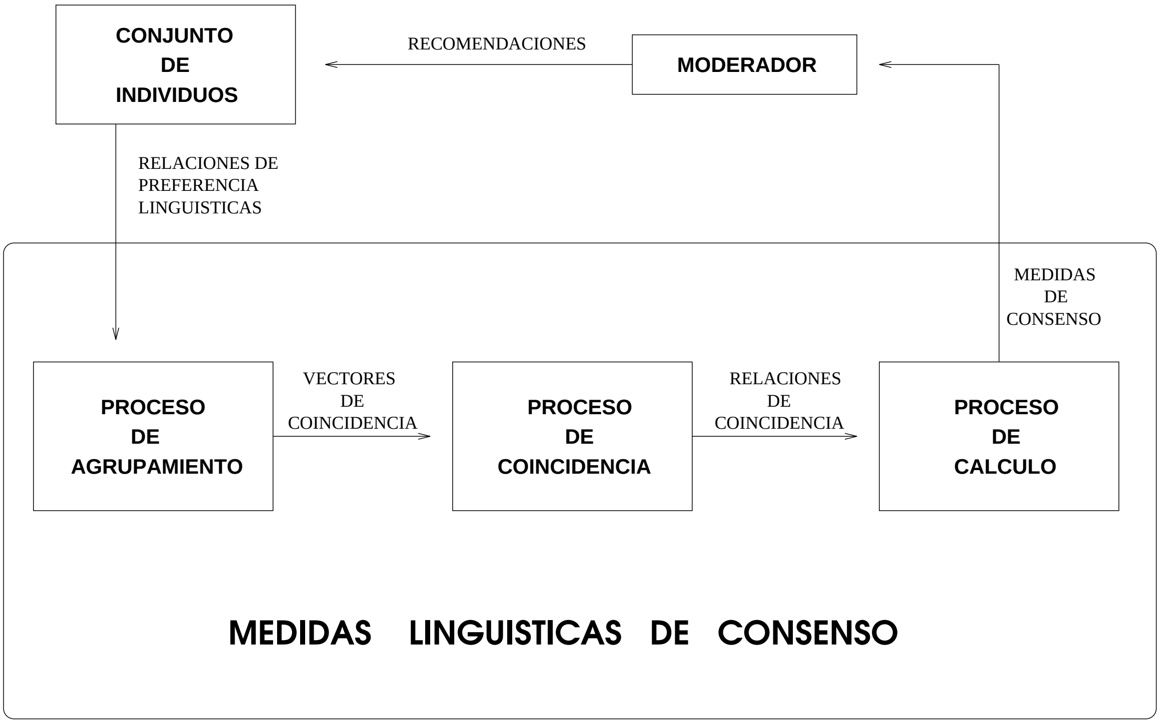

Figura 3.4. Esquema de Consenso Basado en Coincidencia Rígida y Flexible

valores lingüísticos asignadas a los pares de alternativas. Para cada par de alternativas, se obtiene un conjunto de subconjuntos de individuos, normalmente diferentes. Cada subconjunto se representa mediante el valor lingüístico (una etiqueta) elegido por todos los individuos que lo componen. Para cada subconjunto se calcula su cardinalidad y los grados de importancia de los individuos que lo componen (caso de trabajar con problemas de TDG heterogéneos). Toda esta información se almacena en unas estructuras denominadas "vectores de coincidencia".

2. **Proceso de Coincidencia**. Este es un proceso guiado por la idea de coincidencia flexible. Consiste en determinar para cada par de alternativas su grado de coincidencia y la etiqueta lingüística colectiva en torno a la cual existe ese grado. Asumimos que sobre un posible valor lingüístico de una preferencia sobre un par de alternativas existe coincidencia desde el momento en que su subconjunto de individuos asociado está formado por más de dos individuos. El grado de coincidencia de cada par de alternativas viene a ser algo así como el promedio o la proporción de individuos que coinciden en algún valor de preferencia asignado a ese par, aunque no sea el mismo

para todos. La etiqueta lingüística colectiva de cada par es una etiqueta promedio que simboliza, de algún modo, el valor lingüístico en torno al que se da ese grado de coincidencia, es decir, el valor de preferencia al que tiende la mayoría de individuos. Toda esta información se almacen en dos estructuras:

1. *Relación de coincidencia de etiquetas*, que contiene las etiquetas colectivas calculadas para la preferencia sobre cada par de alternativas, y
2. *Relación de coincidencia de individuos*, que almacena los grados de coincidencia de la preferencia sobre cada par de alternativas y también los grados de importancia de los individuos que coinciden (en el caso de problemas de TDG heterogéneos).

3. Proceso de Cálculo. Finalmente, en este proceso a partir de las relaciones de coincidencia se obtienen las distintas medidas de consenso en cada nivel de opinión, como se muestra en la figura 3.5. Como hemos mencionado, éste es un proceso secuencial que actúa en los tres niveles de opinión, de modo que, unas veces las medidas de cada nivel superior se obtienen por fusión de las medidas halladas en el nivel inferior, y otras por fusión de los valores de las relaciones de coincidencia. En el primer caso, la fusión se realiza mediante el operador LOWA guiado por cuantificadores lingüístico difusos, Q^1, representado el concepto de mayoría difusa de alternativas (visto en el apartado 2.1.2), y en el segundo, mediante una media proporcional guiada por un cuantificador, Q^2, representado el concepto de mayoría difusa de individuos (ver modelo del apartado 3.5 y 3.4 respectivamente). El proceso de cálculo de la figura 3.5 representa el seguido en el apartado 3.5. En todos los casos, en el nivel de opinión inferior, los grados de consenso se obtienen a partir de la relación de coincidencia de individuos cuantificada mediante un cuantificador, Q^2, mientras que las proximidades lingüísticas de un individuo se obtienen a partir de la distancia entre la relación de etiquetas colectivas y su relación de preferencia lingüísticas.

Este esquema se repite periódicamente, hasta que el grado de consenso alcanzado es satisfactorio.

Observando la forma propuesta de cuantificar las medidas de consenso que se obtienen, podemos anticipar que:

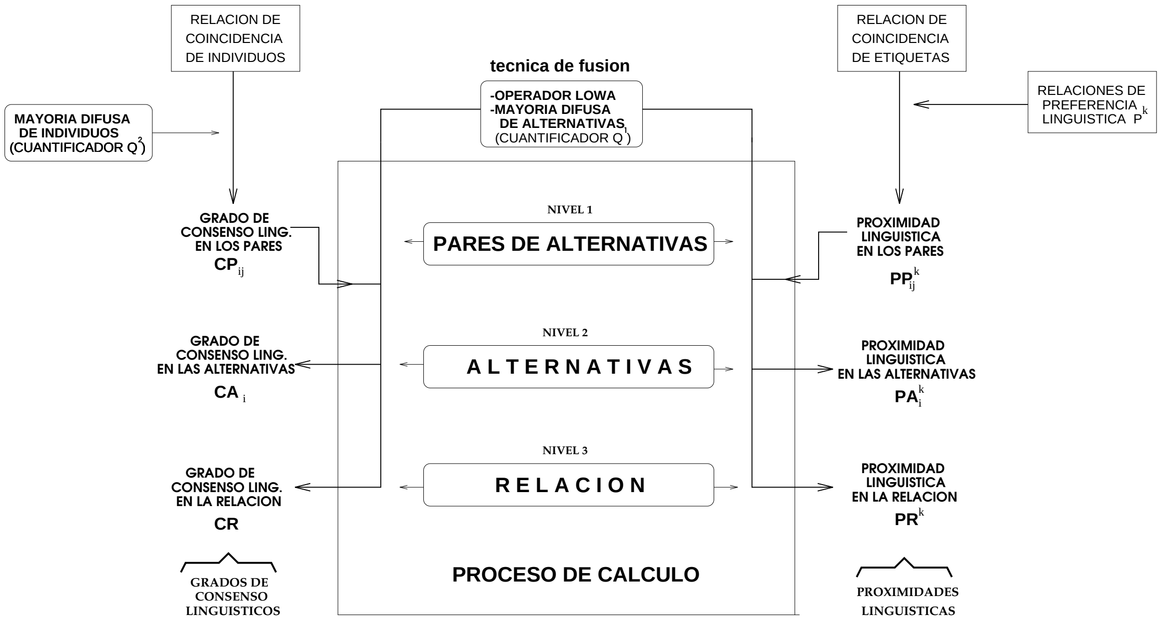

Figura 3.5. Proceso de Cálculo de las Medidas

- el grado de consenso lingüístico en un par de alternativas expresa el estado de consenso de los Q^2 individuos de acuerdo a sus preferencias sobre el par de alternativas;

- el grado de consenso lingüístico en una alternativa expresa el estado de consenso de los Q^2 individuos de acuerdo a sus preferencias sobre los Q^1 pares de alternativas donde la alternativa aparece;

- el grado de consenso lingüístico en la relación expresa el estado de consenso de los Q^2 individuos de acuerdo a sus preferencias sobre los Q^1 pares de alternativas;

- la proximidad lingüística en un par de alternativas expresa el estado de acuerdo de un individuo con el resto en sus preferencias sobre el par;

- la proximidad lingüística en una alternativa expresa el estado de acuerdo de un individuos con el resto en sus preferencias sobre los Q^1 pares de alternativas donde la alternativa aparece; y

- la proximidad lingüística en la relación expresa el estado de acuerdo de un individuos con el resto en sus preferencias sobre los Q^1 pares de alternativas.

En el proceso de coincidencia, en el momento de la selección de los subconjuntos de individuos que determinan el grado de coincidencia y la etiqueta colectiva que caracteriza a cada par de alternativas, se pueden adoptar diferentes políticas de coincidencia. Nosotros consideramos estas dos:

1. *Política de coincidencia promedio.* Consiste en obtener los grados de coincidencia y las etiquetas colectivas de cada par de alternativas a partir de todos los subconjuntos de individuos sobre los que existe coincidencia (con cardinalidad mayor o igual a dos).

2. *Política de coincidencia maximal.* En este caso, los grados de coincidencia y las etiquetas colectivas de cada par de alternativas se obtienen a partir de todos los subconjuntos de individuos con la mayor cardinalidad.

La primera política intenta que las medidas de consenso que se obtenga reflejen la opinión de la mayoría de individuos. Su uso es aconsejable en etapas avanzadas del proceso de consenso. La segunda política intenta que las medidas de consenso reflejen la opinión del grupo mayoritario de individuos. Su uso es aconsejable en las etapas iniciales del proceso de consenso, con vistas a acelerar el proceso de consenso. En cualquier caso, un uso conjunto de ambas es recomendable.

Cada política de coincidencia induce un modelo de consenso lingüístico. La primera el modelo de consenso lingüístico guiado por medidas de consenso promedio, y la segunda, el modelo de consenso lingüístico guiado por medidas de consenso lingüísticas maximales. Ambos se estudian, en detalle, en los apartados 3.4 y 3.5 respectivamente. Para ello se toman diferentes contextos de TDG, pero ambos modelos son aplicables tanto en unos como en otros.

3.3.2 Esquema de Obtención Basado en Coincidencia Difusa

El esquema de obtención de las medidas de consenso bajo esta perspectiva de coincidencia es un esquema de fusión jerárquico, como se muestra en la figura 3.6, desarrollado desde el nivel de opinión más bajo hasta el más alto. Está compuestos de dos procesos:

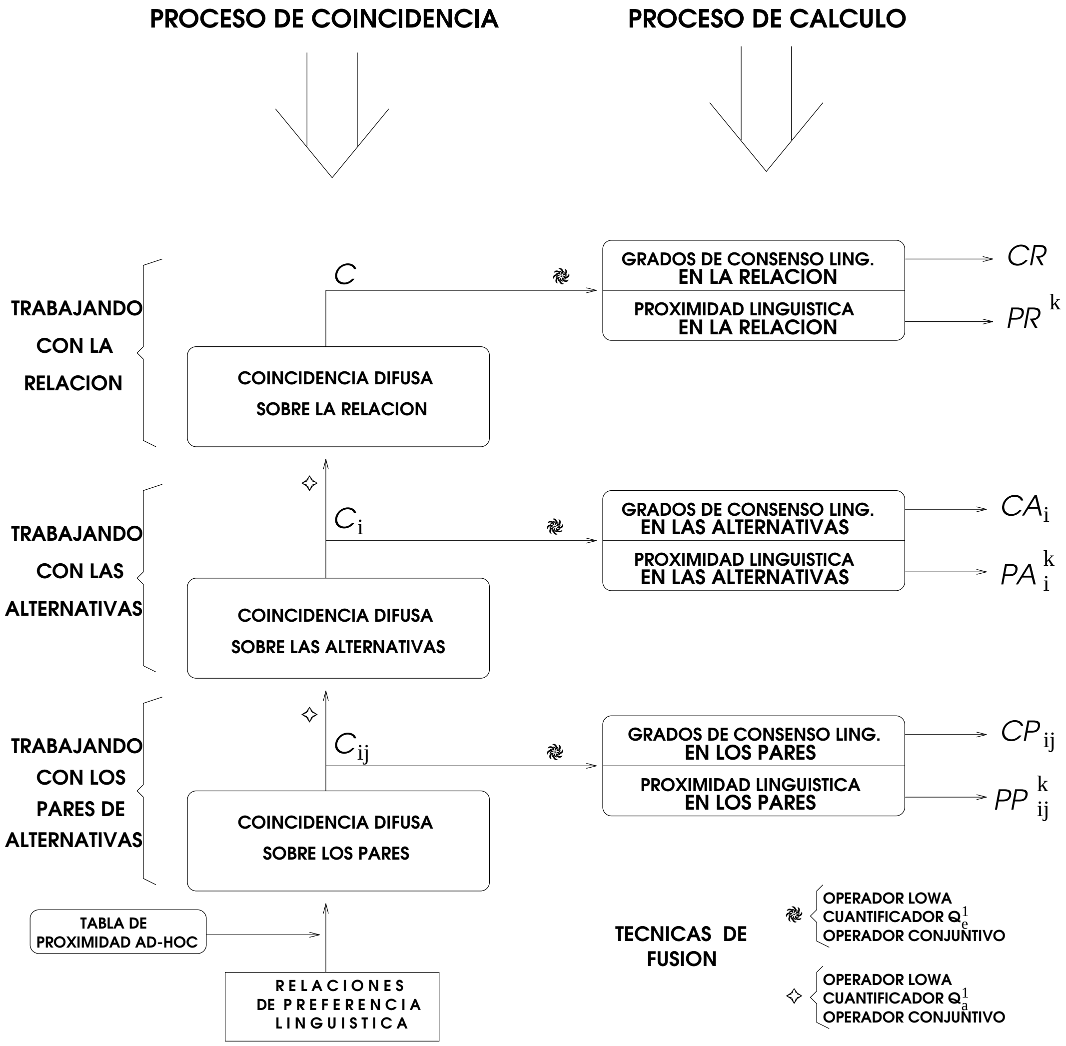

Figura 3.6. Esquema de Obtención Basado en Coincidencia Difusa

1. **Proceso de Coincidencia**. Consiste en evaluar la coincidencia difusa entre todos los pares de individuos en cada nivel de opinión.

2. **Proceso de Cálculo**. Consiste en evaluar las medidas de consenso en cada nivel de opinión.

Cada proceso a su vez está constituido por tres fases de trabajo sobre: (i) los pares de alternativas, (ii) las alternativas, y (iii) la relación. Estas fases se aplican alternativamente entre ambos procesos, comenzando en la fase (i) del proceso de coincidencia. Brevemente, el modelo de obtención se desarrolla como sigue:

1. **Sobre los pares de alternativas.**
   Primero, comenzando en el nivel de opinión de los pares de alternativas, para cada par de alternativas se obtienen los grados de coincidencia difusa existentes para todos los posibles pares de individuos. El grado de coincidencia difusa de un par de individuos sobre un par de alternativas dado se consigue a partir de la proximidad existente entre sus valores de preferencia asignados a dicho par de alternativas. Luego, a partir de esos grados de coincidencia, se obtienen las medidas de consenso de este nivel.

2. **Sobre las alternativas.**
   Segundo, siguiendo con el nivel de opinión de las alternativas, para cada alternativa se obtienen los grados de coincidencia difusa existentes para todos los posibles pares de individuos. El grado de coincidencia difusa de un par de individuos sobre una alternativa dada se consigue a partir del conjunto formado por todos los grados de coincidencia difusa, hallados en la fase anterior, para todos los pares de alternativas donde la alternativa dada aparece. Estos grados de coincidencia difusa se calculan por agregación o fusión mediante el operador LOWA guiado por cuantificadores, Q_a^1, representando el concepto de mayoría difusa de alternativas. Luego, igualmente, a partir de esos grados se obtienen las medidas de consenso de este nivel.

3. **Sobre la relación.**
   Finalmente, en el nivel de opinión de relación, para el conjunto total de alternativas se obtienen los grados de coincidencia difusa existentes para todos los posibles pares de individuos. El grado de coincidencia difusa de un par de individuos sobre el conjunto total de alternativas, se consigue a partir de los grados de coincidencia difusa hallados en la fase anterior, y actuando del mismo modo. Del mismo modo, al final las medidas de consenso respectivas de este nivel de opinión son halladas.

En todas las fases, las medidas de consenso lingüístico se calculan por fusión de sus respectivos grados de coincidencia mediante el operador LOWA guiado por cuantificadores, Q_e^1, representado el concepto de mayoría difusa de individuos.

Como en el anterior esquema, observando la forma de cuantificar las medidas de consenso que se obtienen, podemos concluir que:

- el grado de consenso lingüístico en un par de alternativas expresa el estado de consenso de los Q_e^1 pares de individuos de acuerdo a sus preferencias sobre el par de alternativas;
- el grado de consenso lingüístico en una alternativa expresa el estado de consenso de los Q_e^1 pares de individuos de acuerdo a sus preferencias sobre los Q_a^1 pares de alternativas donde la alternativa aparece;
- el grado de consenso lingüístico en la relación expresa el estado de consenso de los los Q_e^1 pares de individuos de acuerdo a sus preferencias sobre los Q_a^1 pares de alternativas;
- la proximidad lingüística en un par de alternativas expresa el estado de acuerdo de un individuo con los Q_e^1 restantes en sus preferencias sobre el par;
- la proximidad lingüística en una alternativa expresa el estado de acuerdo de un individuos con los Q_e^1 restantes en sus preferencias sobre los Q_a^1 pares de alternativas donde la alternativa aparece; y
- la proximidad lingüística en la relación expresa el estado de acuerdo de un individuos con los Q_e^1 restantes en sus preferencias sobre los Q_a^1 pares de alternativas.

Este esquema se desarrolla en el modelo de consenso lingüístico guiado por medidas de consenso basadas en coincidencia difusa propuesto en el apartado 3.6.

Nota. En los dos esquemas, cuando trabajamos en entornos de TDG heterogéneos, usamos para transformar la información ponderada cualquiera de las funciones de conjunción lingüísticas, vistas en el apartado 2.3.4. Concretamente, en los modelos del primer esquema usamos la $LC_1^{\rightarrow}$ o el MIN usual, y en el modelo del segundo cualquiera de ellas. Actuamos, de igual modo, cuando tenemos alternativas con grados de relevancia. En cada uno de los modelos que mostramos a continuación veremos como hacerlo.

A continuación desarrollamos cada uno de los modelos de consenso lingüístico que presentamos. Cada uno se define en un contexto de TDG diferente, pero como hemos mencionado, salvando algunas dificultades, son trasladables de un contexto a otro.

3.4 Modelo de Consenso Lingüístico Guiado por Medidas de Consenso Lingüísticas Promedio

Este modelo esta soportado por una política de coincidencia promedio, en base a la cual los datos a partir de los que se obtienen las medidas de consenso se elaboran en función de las preferencias de todos los subconjuntos de individuos que coinciden. Por tanto, es una política que intenta que las medidas de consenso representen la opinión de la mayor parte posible de individuos. Es una política apropiada para estados avanzados o finales del proceso de consenso, pero no para estados iniciales, en los que se busca acentuar al máximo las diferencias, de cara a invitar a los individuos a acelerar el proceso de consenso.

Este modelo lo desarrollamos asumiendo el modelo lingüístico de TDG tipo B, visto en el apartado 1.3.4. Este es un problema de TDG heterogéneo que se formula como sigue:

- hay un conjunto finito de alternativas $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ $(n \geq 2)$,
- sobre el que ha de decidir un conjunto finito de individuos $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$ $(m \geq 2)$;
- los individuos expresan sus preferencias en un dominio lingüístico, S, previamente establecido;
- cada individuo, $e_k \in E$, expresa sus opiniones sobre X mediante una relación de preferencia lingüística, $P^k \subset X\text{x}X$, con función de pertenencia

$$\mu_{P^k} : X\text{x}X \rightarrow S;$$

- sin pérdida de generalidad, asumimos que trabajamos con relaciones de preferencia lingüísticas recíprocas en el sentido visto en 1.3.3, es decir,

$$p_{ij}^k = NEG(p_{ji}^k), \text{ y } p_{ii}^k = \textit{Indefinido}(-)\ \forall i, j;$$

- se considera asociado a cada individuo, $e_k \in E$, un grado de importancia, evaluado en el intervalo [0,1],

$$\mu_E : E \rightarrow [0, 1];$$

- se considera asociado a cada alternativa, $x_i \in X$, un grado de relevancia, evaluado en el intervalo [0,1],

$$\mu_R : X \to [0,1].$$

Para este problema de TDG heterogéneo, los procesos del modelo de consenso lingüístico guiado por medidas de consenso promedio se desarrollan como sigue.

1. Proceso de Agrupamiento

   A partir de las relaciones de preferencia lingüística, $\{P^1, P^2, \ldots, P^k\}$, dadas por los individuos, y en base a una idea de coincidencia rígida, se agrupan los individuos de acuerdo con los valores de preferencia que han asignado a cada par de alternativas y los posibles valores que podrían haber sido asignados. Para ello, para cada par de alternativas, (x_i, x_j), definimos un conjunto de subconjuntos de individuos, V_{ij}, en torno a los $T+1$ posibles valores lingüísticos, $s_t \in S$, que la preferencia sobre ese par puede tomar,

$$V_{ij} = \{V_{ij}[s_t], \forall s_t \in S\},$$

$$V_{ij}[s_t] = \{e_k \mid p^k_{ij} = s_t,\ k = 1..m\}.$$

   La información relevante de estos subconjuntos que nos interesa almacenar es su cardinalidad ($\sharp$) y los grados de importancia de los individuos que los componen. Para almacenar esa información se definen para cada par de alternativas dos vectores, llamados vectores de coincidencia $(V^C_{ij}[s_t], V^G_{ij}[s_t]), \forall s_t \in S$.

   (a) El primero, notado por $V^C_{ij}[s_t]$ y llamado vector de coincidencia de los individuos, contiene en cada posición s_t el número de individuos que coinciden en asignar la etiqueta s_t como valor de preferencia al par de alternativas (x_i, x_j). Se obtiene de acuerdo a la siguiente expresión:

$$V^C_{ij}[s_t] = \sharp(V_{ij}[s_t]), \forall s_t \in S.$$

   (b) El segundo, notado por $V^G_{ij}[s_t]$ y llamado vector de coincidencia de grados, contiene en cada posición s_t la media aritmética de los grados de importancia de los individuos que coinciden en asignar la etiqueta s_t como valor de preferencia al par de alternativas (x_i, x_j). Se obtiene de acuerdo a la siguiente expresión:

$$V_{ij}^G[s_t] = \begin{cases} (\sum_{e_z \in V_{ij}[s_t]} \mu_E(z))/V_{ij}^C[s_t] & \text{si } V_{ij}^C[s_t] > 1 \\ \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

2. Proceso de Coincidencia

Este proceso es guiado por el concepto de coincidencia flexible entre individuos. Para detectar el grado de coincidencia sobre un par de alternativas consideramos que existe coincidencia sobre la etiqueta asignada a un valor de preferencia cuando hay más de un individuo que la ha escogido como valor de preferencia. En base a este concepto y partiendo de los vectores de coincidencia, para cada par de alternativas, (x_i, x_j), se calculan dos relaciones de coincidencia. La primera, simbolizada por RCE_{ij} y llamada relación de coincidencia de etiquetas, es para almacenar la etiqueta lingüística colectiva que se deriva de los valores de preferencia de los individuos que coinciden. La segunda, simbolizada por RCI_{ij} y llamada relación de coincidencia de individuos, alberga los grados de coincidencia existentes sobre el par y los grados de importancia de los individuos que los originan.

En este modelo las relaciones de coincidencia son obtenidas en base a una política de coincidencia promedio, como sigue:

(a) *Relación de Coincidencia de Etiquetas (RCE)*

Contiene en cada posición (i, j) la etiqueta lingüística colectiva (RCE_{ij}) asignada al valor de preferencia del par de alternativas (x_i, x_j). Se obtiene de acuerdo a la siguiente expresión:

$$RCE_{ij} = \begin{cases} \phi_{Q^1_{et}}(l_1, \ldots, l_q) & \text{si } \sharp(M_{ij}) > 1 \\ l_q & \text{si } \sharp(\mathrm{M}_{ij}) = 1 \\ Indefinido & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$l_k \in M_{ij},\ k = 1, \ldots, q$, donde,

$$M_{ij} = \{s_y \mid V_{ij}^C[s_y] > 1, s_y \in S\},$$

es el conjunto de etiquetas que han sido escogidas como valor de preferencia por más de un individuo. Como puede observarse cada etiqueta colectiva se obtiene a partir de la agregación de los valores lingüísticos elegidos por todos los subconjuntos de individuos que coinciden, mediante el operador de agregación lingüística LOWA, $\phi_{Q^1_{et}}$, guiado por un cuantificador, Q^1_{et}, que refleje apropiadamente el sentido de la mayoría de los valores lingüísticos elegidos.

(b) *La Relación de Coincidencia de Individuos (RCI)*

Contiene en cada posición (i, j) dos componentes:

i. RCI^a_{ij}, el grado de coincidencia asignado al valor de preferencia del par de alternativas (x_i, x_j) en función del número de individuos cuyas opiniones se usan para hallar RCE_{ij} y,

ii. RCI^b_{ij}, la media de los grados de importancia de los individuos cuyas opiniones se usan para hallar RCE_{ij}.

Ambos componentes se obtienen de acuerdo a las siguientes expresiones:

$$RCI^a_{ij} = \begin{cases} \frac{\sum_{s_y \in M_{ij}} (V^C_{ij}[s_y]/m)}{\sharp(M_{ij})} & \text{si } \sharp(M_{ij}) \neq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$RCI^b_{ij} = \begin{cases} \frac{\sum_{s_y \in M_{ij}} V^G_{ij}[s_y]}{\sharp(M_{ij})} & \text{si } \sharp(M_{ij}) \neq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

3. Proceso de Cálculo

En este paso se calculan las medidas de consenso lingüísticas distinguiendo entre tres niveles de opinión.

Como hemos mencionado, trabajamos con dos tipos de medidas de consenso, analizamos ambos a continuación.

(a) **Grados de Consenso Lingüísticos**

Sirven para evaluar el grado de consenso existente entre los individuos. Este tipo de medidas se usan por el moderador para decidir sobre la necesidad de continuar el proceso de consenso. Se hallan usando el grado de relevancia de las alternativas, cuantificadores lingüísticos y la relación de consenso RCI. Se pueden distinguir tres grados de consenso:

i. Nivel de los pares de alternativas: *grado de Consenso lingüístico en los Pares de alternativas (CP_{ij}).* Se define para cada cada par de alternativas, (x_i, x_j), e indica el grado de consenso existente entre los individuos en torno al valor de preferencia de ese par. Se obtiene de acuerdo a la siguiente expresión:

$$CP_{ij} = Q^2(RCI^a_{ij} \wedge \mu_I(x_{ij}))$$

con $i, j = 1, \ldots, n,\ i \neq j$, donde $\mu_I(x_{ij})$ simboliza la importancia del grado de consenso alcanzado sobre el valor de preferencia asignado al par de alternativas (x_i, x_j), y se define como:

$$\mu_I(x_{ij}) = \begin{cases} \frac{\mu_R(i)+\mu_R(j)+RCI^b_{ij}}{3} & \text{si } \mathrm{RCI}^b_{ij} \neq 0 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Si se quiere que los grados de consenso tengan el mismo dominio de expresión que las proximidades linguisticas, hemos de tomar como dominio lingüístico de definición del cuantificador, Q^2, el mismo usado para expresar las preferencias de los individuos, es decir, $L = S$.

ii. Nivel de las alternativas: *grado de Consenso lingüístico en las Alternativas (CA_i).* Se define para cada alternativa, x_i, e indica el grado de consenso existente entre los individuos en torno a los valores de preferencia de cada par en el que interviene dicha alternativa. Se obtiene conforme a:

$$CA_i = Q^2[\sum_{j=1_{i\neq j}}^{n} (RCI^a_{ij} \wedge \mu_I(x_{ij}))/(n-1)] ,$$

con $i = 1, \ldots, n$.

iii. Nivel de la relación: *grado de Consenso lingüístico en la Relación (CR).* Se define para el conjunto completo de pares de alternativas, es decir la relación P, e indica el grado de consenso existente entre los individuos en torno a los valores de preferencia de todos los pares de alternativas. Se obtiene como:

$$CR = Q^2[(\sum_{i}^{n} \sum_{j=1_{i\neq j}}^{n} (RCI^a_{ij} \wedge \mu_I(x_{ij})))/(n^2-n)].$$

(b) **Proximidades Lingüísticas**

Sirven para evaluar la proximidad de las opiniones de los individuos a las etiquetas colectivas actuales de los valores de preferencia. Este tipo de medidas se usan por el moderador para identificar qué individuos están más lejos de las posturas colectivas y en qué valores de preferencia existen esas diferencias. Se calculan usando las relaciones de preferencias lingüísticas de los individuos, P^k, el operador de agregación lingüístico LOWA, cuantificadores difusos lingüísticos y la relación de consenso de etiquetas RCE. Se pueden distinguir tres proximidades lingüísticas:

i. Nivel de los pares de alternativas: *Proximidad lingüística en los Pares de alternativas (PP^k_{ij}).* Se evalúa para cada par de alternativas (x_i, x_j), y expresa la proximidad entre la opinión asignada por un individuo, e_k, como valor de preferencia del par y la obtenida a partir del grupo de individuos (etiqueta colectiva del par). Se obtiene de acuerdo a la siguiente expresión:

$$PP^k_{ij} = \begin{cases} p^k_{ij} - RCE_{ij} & \text{si } p^k_{ij} > RCE_{ij} \\ RCE_{ij} - p^k_{ij} & \text{si } RCE_{ij} >= p^k_{ij} \\ s_T & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$i \neq j$, con $i, j = 1, \ldots, n$, y $k = 1, \ldots, m$, donde si $p^k_{ij} = s_t$ y $RCE_{ij} = s_v$ entonces $p^k_{ij} - RCE_{ij}$ se define como la etiqueta s_w, tal que, $w = t - v$.

ii. Nivel de las alternativas: *Proximidad lingüística en las Alternativas (PA^k_i).* Se calcula para cada alternativa x_i, e indica la proximidad entre las opiniones asignadas por un individuo, e_k, a todos los valores de preferencia de los pares de alternativas donde interviene x_i, y las obtenidas del grupo de individuos (etiquetas colectivas de cada par donde x_i aparece). Se obtiene conforme a esta expresión:

$$PA^k_i = \phi_{Q^1}(PP^k_{ij}, j = 1, \ldots, n,\ j \neq i)$$

con $k = 1..m,\ i = 1..n$.

iii. Nivel de la relación: *Proximidad lingüística en la Relación (PR^k).* Se obtiene para el conjunto completo de pares de alternativas, P, y mide la proximidad entre las opiniones asignadas por un individuo, e_k, a todos los valores de preferencia de todos los pares de alternativas, (x_i, x_j), y las obtenidas del grupo de individuos (la relación de coincidencia RCE). Se define como:

$$PR^k = \phi_{Q^1}(PP^k_{ij},\ i,j = 1..n,\ j \neq i)$$

con , $k = 1..m$.

Ejemplo 3.4.1 Supongamos que tenemos el siguiente conjunto de 9 etiquetas para expresar las preferencias de los individuos,

T	$Total$	$(1, 1, 0, 0)$
AI	$Altísimo$	$(.98, .99, .05, .01)$
MA	Muy_Alto	$(.78, .92, .06, .05)$
A	$Alto$	$(.63, .80, .05, .06)$
M	$Medio$	$(.41, .58, .09, .07)$
B	$Bajo$	$(.22, .36, .05, .06)$
MB	Muy_Bajo	$(.1, .18, .06, .05)$
BI	$Bajísimo$	$(.01, .02, .01, .05)$
N	$Nulo$	$(0, 0, 0, 0)$

representado graficamente en la figura 3.7,

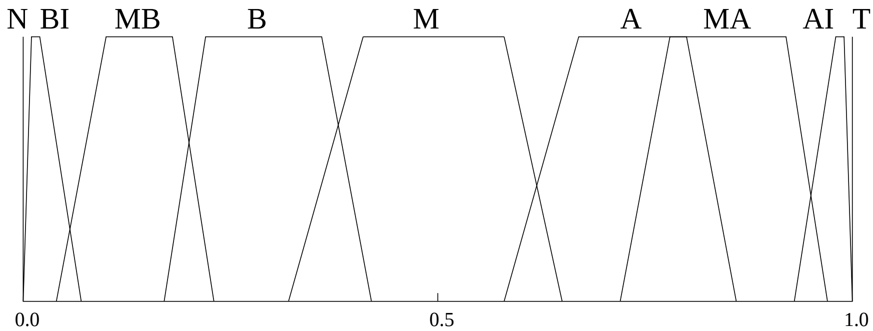

Figura 3.7. Distribución del Conjunto de 9 Etiquetas

Asumimos que tenemos cuatro alternativas y cuatro individuos cuyas preferencias lingüísticas usando el anterior conjunto de 9 etiquetas son:

$$P^1 = \begin{bmatrix} - & B & A & MB \\ A & - & M & M \\ B & M & - & MB \\ MA & M & MA & - \end{bmatrix} P^2 = \begin{bmatrix} - & M & M & MB \\ M & - & A & M \\ M & B & - & MB \\ MA & M & MA & - \end{bmatrix}$$

$$P^3 = \begin{bmatrix} - & M & A & N \\ M & - & MA & M \\ B & MB & - & MB \\ T & M & MA & - \end{bmatrix} P^4 = \begin{bmatrix} - & B & A & B \\ A & - & MB & B \\ B & MA & - & MB \\ A & A & MA & - \end{bmatrix}.$$

Sus grados de relevancia y de importancia, respectivamente, son:

$$\mu_R(1) = 0.4, \mu_R(2) = 1, \mu_R(3) = 0.3, \mu_R(4) = 0.8,$$

y,

$$\mu_E(1) = 0.9, \mu_E(2) = 0.2, \mu_E(3) = 0.5, \mu_E(4) = 0.7.$$

Usaremos el cuantificador lingüístico "al menos la mitad" con parametros $(0.0, 0.5)$, en sus dos versiones, numérica y lingüística, para calcular las medidas de consenso.

Algunos ejemplos de subconjuntos de individuos y de sus vectores de coincidencia asociados, obtenidos en el proceso de agrupamiento son:

$$V_{13}[A] = \{e_1, e_3, e_4\} \quad V_{23}[T] = \{\emptyset\} \quad V_{24}[B] = \{e_1\} \quad V_{34}[MB] = \{e_1, e_2, e_3, e_4\},$$

con sus respectivos componentes $(V_{ij}^C[s_t], V_{ij}^G[s_t])$:

$$V_{13}^C[A] = 3 \qquad V_{23}^C[T] = 0 \quad V_{24}^C[B] = 1 \qquad V_{34}^C[MB] = 4$$

$$V_{13}^G[A] = 0.7 \quad V_{23}^G[T] = 0 \quad V_{24}^G[B] = 0.7 \quad V_{34}^G[MB] = 0.575.$$

Las relaciones de coincidencia que se obtienen en el proceso de coincidencia son:

1. **Relación de Coincidencia de Individuos**

$$RCI^a = \begin{bmatrix} - & 0.5 & 0.75 & 0.5 \\ 0.5 & - & 0 & 0.75 \\ 0.75 & 0 & - & 1 \\ 0.5 & 0.75 & 1 & - \end{bmatrix} \quad RCI^b = \begin{bmatrix} - & 0.575 & 0.7 & 0.55 \\ 0.575 & - & 0 & 0.533 \\ 0.7 & 0 & - & 0.575 \\ 0.55 & 0.533 & 0.575 & - \end{bmatrix}$$

2. **Relación de Coincidencia de Etiquetas**

$$RCE = \begin{bmatrix} - & M & A & MB \\ A & - & - & M \\ B & - & - & MB \\ MA & M & MA & - \end{bmatrix}$$

Nota. Las etiquetas colectivas sobres los pares (x_2, x_3) y (x_3, x_2), RCE_{23} y RCE_{32} están indefinidas porque no hay ningún valor lingüístico que reuna a más de dos individuos.

Las medidas de consenso que se obtienen en este momento del proceso de consenso son:

A. Grados de Consenso

A.1. *Nivel de los Pares de Alternativas*

Las importancias del consenso en cada par de alternativas son:

$$\mu_I(x_{ij}) = \begin{bmatrix} - & 0.6583 & 0.4667 & 0.5833 \\ 0.6583 & - & 0.4333 & 0.7767 \\ 0.4667 & 0.4333 & - & 0.5583 \\ 0.5833 & 0.7767 & 0.5583 & - \end{bmatrix}.$$

y los grados de consenso lingüísticos en los pares de alternativas, CP son:

$$CP = \begin{bmatrix} - & T & MA & T \\ T & - & N & T \\ MA & N & - & T \\ T & T & T & - \end{bmatrix}$$

A.2. *Nivel de las Alternativas*

Los grados de consenso lingüísticos en las alternativas, CA_i son:

$$CA_1 = Q^2(0.4889) = AI \qquad CA_2 = Q^2(0.4167) = MA$$
$$CA_3 = Q^2(0.34167) = MA \quad CA_4 = Q^2(0.602767) = T$$

A.3.*Nivel de la Relación*

El grado de consenso lingüísticos en la relación, RC, es

$$RC = Q^2(0.4625) = MA.$$

B. Las Proximidades Lingüísticas

Las proximidades lingüísticas de cada individuo, e_k, a las etiquetas colectivas, con $k = 1, \ldots, m$, son:

B.1. *Nivel de los Pares de Alternativas*

Las proximidades lingüísticas en los pares de alternativas son:

$$PP^1 = \begin{bmatrix} - & BI & N & N \\ N & - & T & N \\ N & T & - & N \\ N & N & N & - \end{bmatrix} PP^2 = \begin{bmatrix} - & N & BI & N \\ BI & - & T & N \\ BI & T & - & N \\ N & N & N & - \end{bmatrix}$$

$$PP^3 = \begin{bmatrix} - & N & N & MB \\ BI & - & T & N \\ N & T & - & N \\ MB & N & N & - \end{bmatrix} PP^4 = \begin{bmatrix} - & BI & N & BI \\ N & - & T & BI \\ N & T & - & N \\ BI & BI & N & - \end{bmatrix}$$

B.2. *Nivel de las Alternativas*

Las proximidades lingüísticas en las alternativas son:

$$\begin{array}{lllll}
\text{Individuo } e_1: & PA_1^1 = BI & PA_2^1 = A & PA_3^1 = A & PA_4^1 = N \\
\text{Individuo } e_2: & PA_1^2 = BI & PA_2^2 = MA & PA_3^2 = MA & PA_4^2 = N \\
\text{Individuo } e_3: & PA_1^3 = BI & PA_2^3 = MA & PA_3^3 = A & PA_4^3 = BI \\
\text{Individuo } e_4: & PA_1^4 = BI & PA_2^4 = MA & PA_3^4 = A & PA_4^4 = BI
\end{array}$$

B.3. *Nivel de la Relación*

Las proximidades lingüísticas en la relación son:

$$PR^1 = BI \quad PR^2 = B \quad PR^3 = B \quad PR^4 = B$$

En este ejemplo se concluye que:

- el grado de consenso existente entre los individuos es muy alto,
- el grado de consenso existente sobre la alternativa x_4 es el mayor, aunque sobre las demás existe un alto grado de consenso,
- el grado de consenso existente sobre los pares (x_2, x_3) y (x_3, x_2) es inexistente,
- el individuo e_3 está muy lejos de las posiciones colectivas sobre las alternativas x_2 y x_3.

□

3.5 Modelo de Consenso Lingüístico Guiado por Medidas de Consenso Lingüísticas Maximales

Este modelo se apoya en una política de coincidencia maximal, en base a la que los datos a partir de los que se obtienen las medidas de consenso se elaboran en función de las preferencias de los subconjuntos de individuos con mayor cardinalidad. Por tanto, es una política que intenta que las medidas de consenso representen la opinión de las mayorías. Es una política apropiada para estados iniciales de un proceso de consenso, donde se busca acentuar al máximo las diferencias, de cara a invitar a los individuos a acelerar el proceso de consenso.

Este modelo lo desarrollamos asumiendo el modelo lingüístico de TDG tipo C, visto en el apartado 1.3.4. Este es un problema de TDG heterogéneo desarrollado en un contexto lingüístico homogéneo, que se formula como sigue:

- hay un conjunto finito de alternativas $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ $(n \geq 2)$,
- sobre el que ha de decidir un conjunto finito de individuos $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$ $(m \geq 2)$;
- los individuos expresan sus preferencias en un dominio lingüístico, S, previamente establecido adecuadamente;
- cada individuo, $e_k \in E$, expresa sus opiniones sobre X mediante una relación de preferencia lingüística, $P^k \subset X\text{x}X$, con función de pertenencia

$$\mu_{P^k} : X\text{x}X \rightarrow S;$$

- sin pérdida de generalidad, y de cara a dar mayor libertad de expresión a los individuos, asumimos que trabajamos con relaciones de preferencia lingüísticas recíprocas débiles y completas, en el sentido visto en 1.3.3, es decir,
  1. por definición $p_{ii}^k = s_0 \ \forall x_i \in X$,
  2. si $p_{ij}^k \geq s_{T/2}$, entonces $p_{ji} \leq s_{T/2}$, y
  3. $p_{ij}^k \geq NEG(p_{ji}^k)$, $\forall (x_i, x_j)$, (Completitud).

- Se considera asociado a cada individuo, $e_k \in E$, un grado de importancia, evaluado en el mismo conjunto de etiqueta usado para expresar las preferencias,

$$\mu_E : E \rightarrow S.$$

- En este caso no consideramos que el conjunto de alternativas sea heterogéneo.

Si hubiésemos mantenido el contexto usado en el desarrollo del modelo anterior, el modelo de consenso que presentamos aquí sólo se vería afectado en el proceso de coincidencia, donde se seleccionarían los subconjuntos de individuos de forma diferente. Ahora bien, dado que cambiamos el marco de aplicación del modelo, concretamente asumimos un problema de TDG heterogéneo en contexto lingüístico homogéneo, todos los procesos se verán afectados.

1. Proceso de Agrupamiento

   Este proceso se desarrolla de igual forma que se hizo en el modelo anterior, pero esta vez, teniendo en cuenta que los grados de importancia de los individuos son etiquetas lingüísticas. En este caso, manejamos los grados de importancia asignados a los individuos mediante el operador LOWA guiado por cuantificadores.

   Por tanto, a partir de las relaciones de preferencia lingüística, $\{P^1, P^2, \ldots, P^k\}$, dadas por los individuos, y para todo par de alternativas, (x_i, x_j), hallamos los subconjuntos de individuos, V_{ij}, en torno a los $T+1$ posibles valores lingüísticos, $s_t \in S$, que la preferencia sobre ese par puede tomar,

$$V_{ij} = \{V_{ij}[s_t], \forall s_t \in S\},$$

$$V_{ij}[s_t] = \{e_k \mid p_{ij}^k = s_t,\ k = 1..m\}.$$

   Los respectivos vectores de coincidencia son:

   (a) Vector de coincidencia de individuos.

$$V_{ij}^C[s_t] = \sharp(V_{ij}[s_t]), \forall s_t \in S.$$

(b) Vector de coincidencia de grados.

Esta componente varia. Este vector contiene en cada posición s_t la etiqueta promedio de los grados de importancia de los individuos que coinciden en asignar la etiqueta s_t como valor de preferencia al par de alternativas (x_i, x_j). Esta etiqueta se obtiene mediante el operador de agregación lingüística LOWA ($\phi_{Q^1_{gr}}$), guiado por un cuantificador, Q^1_{gr}, escogido adecuadamente con vista a obtener una una etiqueta promedio proporcional a todos los grados agregados.

$$V^G_{ij}[s_t] = \begin{cases} \phi_{Q^1_{gr}}(\mu_E(z_1), \mu_E(z_2), \ldots, \mu_E(z_q)) & \text{si } V^C_{ij}[s_t] > 1, \ z_k \in V_{ij}[s_t], \ q = V^C_{ij}[s_t] \\ s_0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

2. Proceso de Coincidencia

Este proceso sí que varía con respecto al desarrollado en el modelo basado en la política de coincidencia promedio. En este modelo las relaciones de coincidencia se obtienen en base a una política de coincidencia maximal, de acuerdo con la cual los valores de las relaciones de coincidencia se seleccionan de entre los valores máximos de los vectores de coincidencia.

(a) *Relación de Coincidencia de Etiquetas (RCE)*

Contiene en cada posición (i, j) la etiqueta lingüística colectiva, (RCE_{ij}), asignada al valor de preferencia del par de alternativas, (x_i, x_j), por el mayor subconjunto de individuos. Primero se calcula cuál es el mayor número de individuos, n_{ij}, que componen los subconjuntos de coincidencia de cada par de alternativas, (x_i, x_j),

$$n_{ij} = \text{MAX}_{s_t \in S}\{V^C_{ij}[s_t]\},$$

y luego se determina el conjunto de etiquetas lingüísticas, M_{ij}, sobre las que existe ese índice de coincidencia, n_{ij}, en ese par de alternativas, (x_i, x_j):

$$M_{ij} = \{s_y \mid V^C_{ij}[s_y] = n_{ij}, s_y \in S\}.$$

El valor de la etiqueta lingüística colectiva que alberga cada posición RCE_{ij} de la relación de coincidencia de etiquetas se obtiene de acuerdo a la siguiente expresión:

$$RCE_{ij} = \begin{cases} s_{ij} & \text{si } V^C_{ij}[s_{ij}] > 1 \\ Indefinido & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde s_{ij} es la valoración lingüística del subconjunto de individuos que presentan el grado mayor de importancia de entre aquellos que presenta el índice mayor de coincidencia, n_{ij}, es decir,

$$V_{ij}^G(s_{ij}) = MAX_{s_y \in M_{ij}}\{V_{ij}^G(s_y)\}.$$

(b) *La Relación de Coincidencia de Individuos (RCI)*

Contiene en cada posición (i, j) dos componentes:

i. RCI_{ij}^a, el grado de coincidencia asignado al valor de preferencia del par de alternativas (x_i, x_j) en función del número de individuos cuyas opiniones se usan para hallar RCE_{ij},

$$RCI_{ij}^a = \begin{cases} V_{ij}^C[s_{ij}]/m & \text{si } V_{ij}^C[s_{ij}] > 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

ii. RCI_{ij}^b, la media de los grados de importancia de los individuos cuyas opiniones se usan para hallar RCE_{ij},

$$RCI_{ij}^b = \begin{cases} V_{ij}^G[s_{ij}] & \text{if } V_{ij}^C[s_{ij}] > 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

3. Proceso de Cálculo

Este proceso se diferencia de su homólogo en el modelo promedio debido al contexto de TDG diferente en el que se estudia. La distinción sólo se hace en el modo de obtener los grados de consenso lingüísticos, ya que ahora hemos de considerar que las alternativas no están ponderadas y que trabajamos con grados de importancia lingüísticos.

(a) **Grados de Consenso Lingüísticos**

i. Nivel de los pares de alternativas: *grado de Consenso lingüístico en los Pares de alternativas* (CP_{ij})*.*

$$CP_{ij} = Q^2(RCI_{ij}^a \wedge \mu_I(x_{ij}))$$

con $i, j = 1, \ldots, n,\ i \neq j$, donde $\mu_I(x_{ij})$ simboliza la importancia del grado de consenso alcanzado sobre el valor de preferencia asignado al par de alternativas (x_i, x_j), pero ahora definido teniendo sólo en cuenta el grado de importancia de los individuos:

$$\mu_I(x_{ij}) = RCI_{ij}^b.$$

ii. Nivel de las alternativas: *grado de Consenso lingüístico en las Alternativas (CA_i).* Se define para cada alternativa, x_i, a partir de la agregación de las medidas de consenso de primer nivel en las que interviene dicha alternativa, mediante el operador de agregación lingüística LOWA, ϕ_{Q^1}, guiado por un cuantificador, Q^1, representando el concepto de mayoría difusa de alternativas.

$$CA_i = \phi_{Q^1}(CP_{ij};\ j = 1, \ldots, n,\ i \neq j),\ i = 1, \ldots, n.$$

iii. Nivel de la relación: *grado de Consenso lingüístico en la Relación (CR).* Se mide para el conjunto completo de pares de alternativas, es decir la relación P, de igual modo que la medida anterior.

$$CR = \phi_{Q^1}(CP_{ij},\ i, j = 1, \ldots, n,\ \ i \neq j).$$

(b) **Proximidades Lingüísticas**

Mantienen la misma expresión que en el modelo de consenso lingüístico guiado por medidas de consenso promedio, es decir:

i. Nivel de los pares de alternativas: *Proximidad lingüística en los Pares de alternativas (PP_{ij}^k).*

$$PP_{ij}^k = \begin{cases} p_{ij}^k - RCE_{ij} & \text{si } p_{ij}^k > RCE_{ij} \\ RCE_{ij} - p_{ij}^k & \text{si } RCE_{ij} \geq p_{ij}^k \\ s_T & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$i \neq j$, con $i, j = 1, \ldots, n$, y $k = 1, \ldots, m$.

ii. Nivel de las alternativas: *Proximidad lingüística en las Alternativas (PA_i^k).*

$$PA_i^k = \phi_{Q^1}(PP_{ij}^k, j = 1, \ldots, n,\ j \neq i)$$

con $k = 1..m,\ i = 1..n$.

iii. Nivel de la relación: *Proximidad lingüística en la Relación (PR^k).*

$$PR^k = \phi_{Q^1}(PP_{ij}^k,\ i,j = 1..n,\ j \neq i)$$

con , $k = 1..m$.

Como antes, mostraremos este modelo con un ejemplo.

Ejemplo 3.5.1 Consideremos el mismo contexto establecido en el ejemplo del apartado 3.4.1, es decir, un conjunto de cuatro alternativas, un conjunto de cuatro individuos, el cuantificador "al menos la mitad" en sus dos versiones, y el mismo conjunto de nueve etiquetas para expresar las preferencias, los grados de importancia y las medidas de consenso.

Las relaciones de preferencia lingüísticas expresadas por los individuos, en esta ocasión son las siguientes:

$$P^1 = \begin{bmatrix} - & B & AI & MB \\ A & - & MA & AI \\ B & B & - & MB \\ AI & M & MA & - \end{bmatrix} P^2 = \begin{bmatrix} - & A & M & MB \\ M & - & MA & M \\ M & B & - & MB \\ MA & A & AI & - \end{bmatrix}$$

$$P^3 = \begin{bmatrix} - & AI & T & N \\ M & - & A & B \\ BI & M & - & MB \\ T & AI & MA & - \end{bmatrix} P^4 = \begin{bmatrix} - & B & A & B \\ AI & - & M & B \\ M & MA & - & MB \\ T & A & T & - \end{bmatrix}$$

y los grados de importancia lingüísticos,

$$\mu_E(1) = AI \quad \mu_E(2) = T \quad \mu_E(3) = B \quad \mu_E(4) = BI.$$

Algunos ejemplos de subconjuntos de individuos y de sus vectores de coincidencia asociados, obtenidos en el proceso de agrupamiento son:

$$V_{13}[A] = \{e_4\} \quad V_{23}[T] = \{\emptyset\} \quad V_{24}[B] = \{e_3, e_4\} \quad V_{41}[T] = \{e_3, e_4\}$$

con sus respectivos componentes $(V_{ij}^C[s_t], V_{ij}^G[s_t])$:

$$V_{13}^C[A] = 1 \quad V_{23}^C[T] = 0 \quad V_{24}^C[B] = 2 \quad V_{41}^C[T] = 2$$

$$V_{13}^G[A] = N \quad V_{23}^G[T] = N \quad V_{24}^G[B] = B \quad V_{41}^G[T] = B$$

Las relaciones de coincidencia que se obtienen en el proceso de coincidencia son:

1. **Relación de Coincidencia de Individuos.**

$$RCI^a = \begin{bmatrix} - & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & - & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & - & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & - \end{bmatrix} \qquad RCI^b = \begin{bmatrix} - & AI & N & T \\ T & - & T & B \\ T & T & - & T \\ B & T & AI & - \end{bmatrix}$$

2. **Relación de Coincidencia de Etiquetas**

$$RCE = \begin{bmatrix} - & B & ? & MB \\ M & - & MA & B \\ M & B & - & MB \\ T & A & MA & - \end{bmatrix}$$

Nota. La etiqueta colectiva RCE_{13} está indefinida (?) porque no hay coincidencia en ninguno de sus subconjuntos de individuos.

Las medidas de consenso que se obtienen en este momento del proceso de consenso son:

A. Grados de Consenso

A.1. *Nivel de los Pares de Alternativas*

Los grados de consenso lingüísticos en los pares de alternativas, CP son:

$$CP = \begin{bmatrix} - & MA & N & T \\ T & - & T & B \\ MA & T & - & T \\ B & T & MA & - \end{bmatrix}$$

A.2. *Nivel de las Alternativas*

Los grados de consenso lingüísticos en las alternativas, CA_i son:

$$CA_1 = T \quad CA_2 = T$$
$$CA_3 = T \quad CA_4 = T$$

A.3. *Nivel de la Relación*

El grado de consenso lingüísticos en la relación, CR, es

$$CR = T.$$

B. Las Proximidades Lingüísticas

Las proximidades lingüísticas de cada individuo e_k a las etiquetas colectivas, con $k = 1, \ldots, m$, son:

B.1. *Nivel de los Pares de Alternativas*

Las proximidades lingüísticas en los pares de alternativas son:

$$PP^1 = \begin{bmatrix} - & N & T & N \\ BI & - & N & M \\ BI & N & - & N \\ BI & BI & N & - \end{bmatrix} PP^2 = \begin{bmatrix} - & BI & T & N \\ N & - & N & BI \\ BI & N & - & N \\ MB & N & BI & - \end{bmatrix}$$

$$PP^3 = \begin{bmatrix} - & M & T & MB \\ N & - & BI & N \\ B & BI & - & N \\ N & MB & N & - \end{bmatrix} PP^4 = \begin{bmatrix} - & N & T & BI \\ B & - & MB & N \\ N & B & - & N \\ N & N & MB & - \end{bmatrix}$$

B.2. *Nivel de las Alternativas*

Las proximidades lingüísticas en las alternativas son:

$$\begin{array}{lllll} \text{Individuo } e_1: & PA_1^1 = A & PA_2^1 = B & PA_3^1 = BI & PA_4^1 = BI \\ \text{Individuo } e_2: & PA_1^2 = MA & PA_2^2 = BI & PA_3^2 = N & PA_4^2 = MB \\ \text{Individuo } e_3: & PA_1^3 = AI & PA_2^3 = BI & PA_3^3 = MB & PA_4^3 = BI \\ \text{Individuo } e_4: & PA_1^4 = MA & PA_2^4 = B & PA_3^4 = MB & PA_4^4 = BI \end{array}$$

B.3. *Nivel de la Relación*

Las proximidades lingüísticas en la relación son:

$$PR^1 = B \quad PR^2 = MB \quad PR^3 = B \quad PR^4 = B$$

Por tanto, en este caso podemos concluir que:

- el grado de consenso existente entre los individuos es total,
- el grado de consenso existente en todas las alternativas es total,
- el grado de consenso existente sobre el par (x_1, x_3) es inexistente,
- el individuo e_2 es el que más alejado está de las posición global,
- la alternativa x_1 presenta mayor desacuerdo entre los individuos, mientras que la x_4 el menor.

□

3.6 Modelo de Consenso Lingüístico Guiado por Medidas de Consenso Lingüísticas Basadas en Coincidencia Difusa

Este modelo lo desarrollamos asumiendo el modelo lingüístico de TDG tipo D, visto en el apartado 1.3.4. Por tanto, se trata de un problema de TDG heterogéneo desarrollado en un contexto lingüístico heterogéneo, que se formula como sigue:

- hay un conjunto finito de alternativas $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ $(n \geq 2)$,

- sobre el que ha de decidir un conjunto finito de individuos $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$ $(m \geq 2)$;
- los individuos expresan sus preferencias en un dominio lingüístico, S, previamente establecido;
- cada individuo, $e_k \in E$, expresa sus opiniones sobre X mediante una relación de preferencia lingüística, $P^k \subset X$xX, con función de pertenencia

$$\mu_{P^k} : X\text{x}X \rightarrow S;$$

- sin pérdida de generalidad, asumimos que trabajamos con relaciones de preferencia lingüísticas recíprocas en el sentido visto en 1.3.3, es decir,

$$p^k_{ij} = NEG(p^k_{ji}), \text{ y } p^k_{ii} = \textit{Indefinido}(-)\ \forall i, j;$$

- se considera asociado a cada individuo, $e_k \in E$, un grado de importancia, evaluado en un dominio lingüístico apropiado, $V = \{v_i\}, i \in H = \{0, \ldots, T'\}$, diferente al usado por los individuos para expresar sus preferencias, y por tanto,

$$\mu_E : E \rightarrow V;$$

- se considera asociado a cada alternativa, $x_i \in X$, un grado de relevancia, evaluado en el dominio lingüístico, V,

$$\mu_R : X \rightarrow V.$$

El modelo de consenso lingüístico guiado por medidas de consenso basadas en coincidencia difusa propuesto para este problema de TDG heterogéneo en contexto lingüístico heterogéneo, contiene una diferencia importante respecto a los demás, ya que en este modelo se permite que los grados de coincidencia difusa y las medidas de consenso sean expresadas en un conjunto de etiquetas, $G = \{g_i\}$, $i \in J = \{0, \ldots, U'\}$, diferente a aquel usado para expresar las opiniones. Este conjunto, G, debe representar los grados de coincidencia y las medidas con un significado apropiado. Una opción para determinarlo consiste en que el grupo de individuos lo elija antes de comenzar el proceso de TDG. Además, como ya hemos mencionado, este modelo obtiene sus medidas de consenso a partir del concepto de coincidencia difusa definido en cada nivel de opinión. A continuación desarrollamos cada una de sus fases para los dos procesos que lo componen.

1. FASE I: Desarrollada Sobre los Pares de Alternativas

   (a) *Proceso de Coincidencia: Paso 1*

   En este primer paso del proceso de coincidencia el concepto de coincidencia difusa entre las preferencias de los individuos se define en el nivel de opinión de los pares de alternativas.

   Definición 3.6.1 *La coincidencia difusa sobre un par de alternativas,* (x_i, x_j), $i \neq j$, *se define como un subconjunto difuso,* C_{ij}, *del conjunto de pares de individuos,*

   $$E^2 = \{e_{kl} = (e_k, e_l),\ k = 1, \ldots, m-1,\ l = k+1, \ldots, m\},$$

   $$C_{ij} = \{(e_{kl}, \mu_{C_{ij}}(e_{kl}))\},$$

   caracterizado por una función de pertenencia,

   $$\mu_{C_{ij}} : E^2 \ \rightarrow \ G$$

   $$\mu_{C_{ij}}(e_{kl}) = NEG(d(p_{ij}^k, p_{ij}^l)),$$

   indicando $\mu_{C_{ij}}(e_{kl})$ *el grado de coincidencia lingüístico entre los valores de preferencia de los individuos* e_k *y* e_l *sobre el par de alternativas,* (x_i, x_j), *y donde* d *simboliza una medida de proximidad o distancia entre opiniones lingüísticas evaluada lingüísticamente en el conjunto de etiquetas,* G, *o sea,* $d : S\text{x}S \rightarrow G$.

   La medida de proximidad, d, entre opiniones lingüísticas se puede definir de tres formas:

   - Por aproximación lingüística usando las funciones de pertenencia asociadas a las etiquetas [7, 74, 75, 94]. Como sabemos, esta forma conlleva el inconveniente de que no siempre se encuentra una etiqueta del conjunto inicial de etiquetas, y entonces hay que aproximar.
   - Por cálculo directo sobre las etiquetas [21, 32, 83, 84, 89]. Esta forma es muy útil cuando el dominio de expresión de las opiniones y de los grados de coincidencia es el mismo, pues se puede definir directamente sobre los índices de las etiquetas. Cuando los dominios de expresión son diferentes, implica

trabajar con dominios diferentes, incluso, a veces, de diferente granularidad, y esto complica mucho la definición.

- Por acuerdo entre los individuos usando una tabla de definición. Esta forma consiste en establecer una "tabla de proximidad ad-hoc", $\Omega : S\text{x}S \rightarrow G$, de acuerdo a las ideas de todos los individuos, de manera que si $p_{ij}^k = s_t$ y $p_{ij}^l = s_v$ entonces

$$d(p_{ij}^k, p_{ij}^l) = \Omega(s_t, s_v),\ \Omega(s_t, s_v) \in G,\ t,\ v \in \{0, \ldots, T\}.$$

  Aquí la dificultad estriba en encontrar una tabla con la que todos los individuos estén de acuerdo.

En principio, asumiendo que todos los individuos que participan en el proceso de TDG son coherentes, no debe de existir ningún problema para hallar una tabla de proximidad ad-hoc común, y por tanto, por simplicidad y comodidad, adoptamos esta forma para definir la medida de proximidad.

Por ejemplo, asumiendo como dominio de expresión de las opiniones el conjunto de etiquetas, S, el conjunto de siete etiquetas dado en el apartado 1.3.2 (figura 1.5), y como dominio de expresición de los grados de coincidencia difusa, G, el conjunto de nueve etiquetas dado en el ejemplo del apartado 3.4.1 (figura 3.7), un ejemplo de tabla de proximidad se muestra en la figura 3.8.

S={ MI, MME, ME, EQ, MA, MMA, MX }
G={ N, BI, MB, B, M, A, MA, AI, T }

$\Omega : S\text{x}S \longrightarrow G$

Ω	MI	MME	ME	EQ	MA	MMA	MX
MX	T	AI	MA	A	M	B	N
MMA	AI	A	A	M	M	N	B
MA	MA	A	A	M	N	M	M
EQ	A	M	M	N	M	M	A
ME	MB	MB	N	M	A	A	MA
MME	MB	N	MB	M	A	A	AI
MI	N	MB	MB	A	MA	AI	T

Figura 3.8. Tabla de Proximidad Ad-hoc

Nota. Aquí no se aborda el problema de cómo obtener dicha tabla, es decir, no se propone ninguna regla para obtenerla. Se aconseja que dicha tabla refleje adecuadamente las posibles formas de evaluar de todos los individuos. Por ello, se pueden encontrar situaciones curiosas, como en el ejemplo de la figura 3.8, donde se considera que $\Omega(MI, MME) = MB$ y $\Omega(MI, ME) = MB$.

(b) *Proceso de Cálculo: Paso 1*

En este primer paso del proceso de cálculo, las dos medidas de consenso del nivel de opinión de los pares de alternativas se calculan de acuerdo a las siguientes definiciones.

Definición 3.6.2 *El grado de consenso lingüístico en un par de alternativas* (x_i, x_j), CP_{ij}, *se define de acuerdo a la siguiente expresión,*

$$CP_{ij} = \phi_{Q_e^1}(LC^{\rightarrow}(\mu_{C_{ij}}(e_{kl}), r_{kl}),\ k = 1, \ldots, m-1,\ l = k+1, \ldots, m),$$

y $r_{kl} = \phi(\mu_E(k), \mu_E(l))$, *con el vector de ponderación del operador LOWA,* $W = [0.5, 0.5]$.

r_{kl} es un grado de importancia promedio, que representa el grado de importancia del grado de coincidencia del par de individuos e_{kl}. Se obtiene mediante el operador de agregación lingüística LOWA, ϕ, con ese vector de ponderación con objeto de de simular una agregación media de los grados de importancia. $LC^{\rightarrow}$ representa a la familia de funciones de conjunción lingüísticas presentada en el apartado 2.3.4 y se usa como función de transformación de información ponderada, y $\phi_{Q_e^1}$ es el operador de agregación lingüística LOWA guiado por el cuantificador, Q_e^1, usado para representar el concepto de mayoría difusa de individuos. En este sentido, CP_{ij} expresa el estado de consenso de los Q_e^1 pares más importantes de individuos de acuerdo a sus preferencias sobre el par de alternativas (x_i, x_j).

Nota. Si observamos la definición 3.6.2, vemos que ella nos obliga explícitamente a que el dominio de expresión de los grados de importancia y de los grados de coincidencia sean el mismo, es decir, $G = V$. Esta restricción aparece también en las próximas definiciones. Se puede eliminar si definimos un método de transformación entre los distintos dominios, tema que desborda los objetivos de la presente memoria.

Definición 3.6.3 *La proximidad lingüística en un par de alternativas,* (x_i, x_j)*, de un individuo,* e_k*,* PP_{ij}^k*, se obtiene conforme a esta expresión,*

$$PP_{ij}^k = \phi_{Q_e^1}(LC^{\rightarrow}(\mu_{C_{ij}}(e_{kl}), \mu_E(l)),\ l = 1, \ldots, m,\ l \neq k),$$

de modo que cuando $\mu_{C_{ij}}(e_{kl}) \notin C_{ij}$ *entonces* $\mu_{C_{ij}}(e_{kl}) = \mu_{C_{ij}}(e_{lk})$*.*

En esta definición, como en la anterior 3.6.2, la medida de consenso se obtiene mediante el operador LOWA, $\phi_{Q_e^1}$, las funciones de transformación de información ponderada, $LC^{\rightarrow}$, y usando los subconjuntos de coincidencia difusa de este nivel. En este caso, sólo se consideran los grados de importancia del resto de individuos y no los grados de importancia promedios. Por tanto, $\mu_E(l)$ se usa como el grado de importancia dado al grado de coincidencia entre el individuo analizado, e_k, y el otro, e_l. En este sentido, PP_{ij}^k expresa el estado de acuerdo de un individuo con los Q_e^1 individuos restantes más importantes en sus preferencias sobre el par de alternativas (x_i, x_j).

2. FASE II: Desarrollada Sobre las Alternativas

   (a) *Proceso de Coincidencia: Paso 2*

   Este es el paso del proceso de coincidencia en el que el concepto de coincidencia difusa entre las preferencias de los individuos se define en el nivel de opinión de las alternativas.

Definición 3.6.4 *La coincidencia difusa sobre una alternativa,* x_i*, se define como un subconjunto difuso,* C_i*, del conjunto de pares de individuos,* E^2

$$C_i = \{(e_{kl}, \mu_{C_i}(e_{kl}))\},$$

caracterizado por una función de pertenencia,

$$\mu_{C_i} : E^2 \ \rightarrow \ G$$

$$\mu_{C_i}(e_{kl}) = \phi_{Q_a^1}(LC^{\rightarrow}(\mu_{C_{ij}}(e_{kl}), r'_{ij}), LC^{\rightarrow}(\mu_{C_{ji}}(e_{kl}), r'_{ij}),\ j \neq i,\ j = 1, \ldots, n),$$

$$r'_{ij} = \phi(\mu_R(i), \mu_R(j)), \quad con \ \ W = [0.5, 0.5],$$

indicando el grado de coincidencia lingüístico entre los valores de preferencia de los individuos e_k *y* e_l *sobre los pares de alternativas que tienen como componente a la alternativa* x_i*.*

r'_{ij} es un grado de relevancia promedio, que representa el grado de relevancia del grado de coincidencia medido sobre el par de alternativas (x_i, x_j). Se obtiene de igual manera que el grado de importancia promedio, r_{kl}, en la definición 3.6.2. En este caso, el grado de coincidencia sobre una alternativa, $\mu_{C_i}(e_{kl})$, se halla mediante una función de transformación de información lingüística, $LC^{\rightarrow}$, y el operador de agregación lingüística LOWA, $\phi_{Q_a^1}$, guiado por un cuantificador, Q_a^1, usado para representar el concepto de mayoría difusa de alternativas.

(b) *Proceso de Cálculo: Paso 2*

En este paso son las dos medidas de consenso del nivel de opinión de las alternativas las que se calculan.

Definición 3.6.5 *El grado de consenso lingüístico en una alternativa x_i, CA_i, se define como:*

$$CA_i = \phi_{Q_e^1}(LC^{\rightarrow}(\mu_{C_i}(e_{kl}), r_{kl}),\ k = 1, \ldots, m-1,\ l = k+1, \ldots, m).$$

En este sentido, CA_i expresa el estado de consenso de los Q_e^1 pares más importantes de individuos de acuerdo a sus preferencias sobre los Q_a^1 pares de alternativas más relevantes que tienen como componente a la alternativa x_i.

Definición 3.6.6 *La proximidad lingüística a una alternativa, x_i, de un individuo, e_k, PA_i^k, se evalúa según la siguiente expresión,*

$$PA_i^k = \phi_{Q_e^1}(LC^{\rightarrow}(\mu_{C_i}(e_{kl}), \mu_E(l)),\ k = 1,\ l = 1, \ldots, m,\ l \neq k).$$

PA_i^k indica el estado de acuerdo de un individuo con los Q_e^1 individuos restantes más importantes en sus preferencias sobre los Q_a^1 pares de alternativas más relevantes que tienen como componente a la alternativa x_i.

3. FASE III: Desarrollada Sobre la Relación

(a) *Proceso de Coincidencia: Paso 3*

Finalmente, éste es el último paso del proceso de coincidencia, en el que se define el concepto de coincidencia difusa entre las preferencias de los individuos en el nivel de opinión de la relación.

Definición 3.6.7 *La coincidencia difusa sobre la relación, P, se define como un subconjunto difuso, C, del conjunto de pares de individuos, E^2*

$$C = \{(e_{kl}, \mu_C(e_{kl}))\},$$

caracterizado por una función de pertenencia,

$$\mu_C : E^2 \ \rightarrow \ G$$

$$\mu_C(e_{kl}) = \phi_{Q_a^1}(LC^{\rightarrow}(\mu_{C_i}(e_{kl}), \mu_R(i)), \ i = 1, \ldots, n),$$

indicando el grado de coincidencia lingüístico entre los valores de preferencia de los individuos e_k y e_l sobre todos los pares de alternativas representados en la relación P.

En esta definición el grado de coincidencia se obtiene como en la definición 3.6.4, mediante una función de transformación de información lingüística, $LC^{\rightarrow}$, y el operador de agregación lingüística LOWA, $\phi_{Q_a^1}$. La diferencia está en que aquí se usan los grados de relevancia lingüísticos de las alternativas, $\mu_R(i)$, en lugar de los grados de relevancia promedios, r'_{ij}, representando el grado de relevancia del grado de coincidencia medido para cada alternativa x_i.

(b) *Proceso de Cálculo: Paso 3*

Actuando de igual modo, se calculan las dos medidas de consenso del nivel de opinión de la relación.

Definición 3.6.8 *El grado de consenso lingüístico en la relación P, CR, se define como,*

$$CR = \phi_{Q_e^1}(LC^{\rightarrow}(\mu_C(e_{kl}), r_{kl}), \ k = 1, \ldots, m-1, \ l = k+1, \ldots, m).$$

y expresa el estado de consenso de los Q_e^1 pares más importantes de individuos, de acuerdo a sus preferencias sobre los Q_a^1 pares de alternativas más relevantes representados por P.

Definición 3.6.9 *La proximidad lingüística en la relación, P, de un individuo, e_k, PR_i^k, se define por*

$$PR_i^k = \phi_{Q_e^1}(LC^{\rightarrow}(\mu_C(e_{kl}), \mu_E(l)), \ l = 1, \ldots, m, \ l \neq k).$$

y expresa el estado de acuerdo de un individuo con los Q_e^1 individuos restantes más importantes en sus preferencias, sobre los Q_a^1 pares de alternativas más relevantes representados por P.

Todo este modelo lo ilustraremos con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.6.10 Consideremos un conjunto de cuatro alternativas y un conjunto de cuatro individuos. Para expresar las opiniones usamos el conjunto de siete etiquetas, S, mostrado en la figura 1.5, y para expresar las medidas de consenso y los grados de relevancia e importancia el conjunto de nueve etiquetas, G, mostrado en la figura 3.7. Las relaciones de preferencia lingüística dadas por los individuos son:

$$P^1 = \begin{bmatrix} - & MME & MMA & MME \\ MMA & - & EQ & EQ \\ MME & ME & - & MME \\ MMA & ME & MMA & - \end{bmatrix} \quad P^2 = \begin{bmatrix} - & ME & EQ & MME \\ M & - & MMA & ME \\ ME & MME & - & MME \\ MMA & EQ & MMA & - \end{bmatrix}$$

$$P^3 = \begin{bmatrix} - & EQ & MMA & MI \\ M & - & MMA & ME \\ MME & MME & - & MME \\ MA & EQ & MMA & - \end{bmatrix} \quad P^4 = \begin{bmatrix} - & ME & MMA & MME \\ M & - & ME & MME \\ MME & EQ & - & MME \\ MMA & MMA & MMA & - \end{bmatrix}.$$

Los grados de relevancia y de importancia de los conjuntos de alternativas y de individuos, respectivamente, son:

$$\mu_R(1) = AI \quad \mu_R(2) = M \quad \mu_R(3) = MA \quad \mu_R(4) = MB,$$

$$\mu_E(1) = M \quad \mu_E(2) = MA \quad \mu_E(3) = M \quad \mu_E(4) = B.$$

Entonces, el anterior modelo se particulariza en este ejemplo como sigue.

A. Nivel de los Pares de Alternativas

A.1. *Coincidencia Difusa en cada Par de Alternativas*

Asumiendo la tabla de proximidad ad-hoc dada en la figura 3.8, para cada par de alternativas, (x_i, x_j), se obtiene su conjunto de coincidencia difusa como el subconjunto difuso de E^2, C_{ij}, resultando:

$$C_{12} = \{(e_{12}, MA), (e_{13}, M), (e_{14}, MA), (e_{23}, M), (e_{24}, T), (e_{34}, M)\},$$

$$C_{13} = \{(e_{12}, M), (e_{13}, T), (e_{14}, T), (e_{23}, M), (e_{24}, M), (e_{34}, T)\},$$

$$C_{14} = \{(e_{12}, T), (e_{13}, MA), (e_{14}, T), (e_{23}, MA), (e_{24}, T), (e_{34}, MA)\},$$

$$C_{21} = \{(e_{12}, M), (e_{13}, M), (e_{14}, M), (e_{23}, T), (e_{24}, T), (e_{34}, T)\},$$

$$C_{23} = \{(e_{12}, M), (e_{13}, M), (e_{14}, M), (e_{23}, T), (e_{24}, B), (e_{34}, B)\},$$

$$C_{24} = \{(e_{12}, M), (e_{13}, M), (e_{14}, M), (e_{23}, T), (e_{24}, MA), (e_{34}, MA)\},$$

$$C_{31} = \{(e_{12}, MA), (e_{13}, T), (e_{14}, T), (e_{23}, MA), (e_{24}, MA), (e_{34}, T)\},$$

$$C_{32} = \{(e_{12}, MA), (e_{13}, MA), (e_{14}, M), (e_{23}, T), (e_{24}, M), (e_{34}, M)\},$$

$$C_{34} = \{(e_{12}, T), (e_{13}, T), (e_{14}, T), (e_{23}, T), (e_{24}, T), (e_{34}, T)\},$$

$$C_{41} = \{(e_{12}, T), (e_{13}, A), (e_{14}, N), (e_{23}, A), (e_{24}, T)), (e_{34}, T)\},$$

$$C_{42} = \{(e_{12}, M), (e_{13}, M), (e_{14}, B), (e_{23}, T), (e_{24}, M), (e_{34}, M)\},$$

$C_{43} = \{(e_{12}, T), (e_{13}, T), (e_{14}, T), (e_{23}, T), (e_{24}, T), (e_{34}, T)\}.$

A.2. *Grado de Consenso Lingüístico en los Pares de Alternativas*

Primero, a partir de los grados de importancia de los individuos, para cada par de individuos, e_{kl}, se calcula su grado de importancia promedio, $r_{kl} \in G$,

$$\{r_{12} = A, r_{13} = M, r_{14} = M, r_{23} = A, r_{24} = A, r_{34} = M\}$$

Aquí y en los siguientes apartados de este ejemplo, asumimos como función de transformación de información ponderada, el operador de conjunción fuerte, $LC_2^{\rightarrow}$,, cuya expresión es:

$$LC_2^{\rightarrow}(a, w) = \begin{cases} MIN(a, w) & \text{si } w > NEG(a) \\ g_0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y como cuantificador lingüístico difuso, Q_e^1, el cuantificador "tantos como sea posible", con el par (0.5,1).

Entonces a partir de los conjuntos de coincidencia difusa, C_{ij}, de los grados de importancia promedio, r_{kl}, a través de la función conjuntiva $LC_2^{\rightarrow}$ y del operador de agregación lingüística LOWA, $\phi_{Q_e^1}$, con el vector de ponderación, $W = [0, 0, 0, 0.32, 0.35, 0.33]$, obtenemos en cada par de alternativas, (x_i, x_j), $i \neq j$, el grado de consenso lingüístico en el par, CP_{ij}.

$$\{CP_{12} = BI, CP_{13} = M, CP_{14} = M\},$$

$$\{CP_{21} = BI, CP_{23} = N, CP_{24} = BI\},$$

$$\{CP_{31} = M, CP_{32} = BI, CP_{34} = M\},$$

$$\{CP_{41} = B, CP_{42} = N, CP_{43} = M\}.$$

A.3. *Proximidad Lingüística en el Par de Alternativas*

A partir de los conjuntos de coincidencia difusa, C_{ij}, de los grados de importancia de cada individuo, $\mu_E(k)$, a través de la función conjuntiva $LC_2^{\rightarrow}$ y del operador de agregación lingüística LOWA, $\phi_{Q_e^1}$, con el vector de ponderación, $W = [0, 0.32, 0.68]$, obtenemos en cada par de alternativas, (x_i, x_j), $i \neq j$, y para cada individuo, e_k, las proximidades lingüísticas en el par, PP_{ij}^k.

1. Individuo e_1:

$$\{PP_{12}^1 = B, PP_{13}^1 = M, PP_{14}^1 = M, PP_{21}^1 = N, PP_{23}^1 = N, PP_{24}^1 = N,$$

$$PP_{31}^1 = M, PP_{32}^1 = M, PP_{34}^1 = M, PP_{41}^1 = M, PP_{42}^1 = N, PP_{43}^1 = M\}.$$

2. Individuo e_2:

$$\{PP_{12}^2 = B, PP_{13}^2 = N, PP_{14}^2 = M, PP_{21}^2 = B, PP_{23}^2 = N, PP_{24}^2 = B,$$

$$PP_{31}^2 = M, PP_{32}^2 = M, PP_{34}^2 = M, PP_{41}^2 = M, PP_{42}^2 = N, PP_{43}^2 = M\}.$$

3. Individuo e_3:

$$\{PP_{12}^3 = B, PP_{13}^3 = M, PP_{14}^3 = M, PP_{21}^3 = B, PP_{23}^3 = N, PP_{24}^3 = B,$$

$$PP_{31}^3 = M, PP_{32}^3 = M, PP_{34}^3 = M, PP_{41}^3 = M, PP_{42}^3 = N, PP_{43}^3 = M\}.$$

4. Individuo e_4:

$$\{PP_{12}^4 = M, PP_{13}^4 = M, PP_{14}^4 = M, PP_{21}^4 = M, PP_{23}^4 = N, PP_{24}^4 = M,$$

$$PP_{31}^4 = M, PP_{32}^4 = N, PP_{34}^4 = M, PP_{41}^4 = M, PP_{42}^4 = N, PP_{43}^4 = M\}.$$

B. Nivel de las Alternativas

B.1. *Coincidencia Difusa en cada Alternativa*

Primero, a partir de los grados de relevancia de las alternativas, $\mu_R(i)$, para cada par de alternativas, (x_i, x_j), se obtiene el grado de relevancia promedio, r'_{ij}, mediante el operador de agregación lingüística LOWA, ϕ, con el vector de ponderación, $W = [0.5, 0.5]$.

$$\{r'_{12} = MA, r'_{13} = AI, r'_{14} = A, r'_{23} = A, r'_{24} = B, r'_{34} = M\}.$$

Asumiendo que el cuantificador lingüístico difuso, Q_a^1, es igual al Q_e^1, entonces, a partir de los conjuntos de coincidencia difusa de cada par de alternativas, C_{ij}, de los grados de relevancia promedio, r'_{ij}, a través de la función conjuntiva $LC_2^{\rightarrow}$ y del operador de agregación lingüística LOWA, $\phi_{Q_a^1}$, con el vector de ponderación $W = [0, 0, 0, 0.32, 0.35, 0.33]$, para cada alternativa, x_i, se obtiene su conjunto de coincidencia difusa como el subconjunto difuso de coincidencia de E^2, C_i, resultando:

$$C_1 = \{(e_{12}, M), (e_{13}, M), (e_{14}, B), (e_{23}, M), (e_{24}, A), (e_{34}, A)\}$$

$$C_2 = \{(e_{12}, BI), (e_{13}, BI), (e_{14}, BI), (e_{23}, B), (e_{24}, BI), (e_{34}, BI)\}$$

$$C_3 = \{(e_{12}, M), (e_{13}, M), (e_{14}, M), (e_{23}, M), (e_{24}, B), (e_{34}, B)\}$$

$$C_4 = \{(e_{12}, BI), (e_{13}, BI), (e_{14}, N), (e_{23}, B), (e_{24}, B), (e_{34}, B)\}.$$

B.2. *Grado de Consenso Lingüístico en una Alternativa*

A partir de los conjuntos de coincidencia difusa, C_i, para cada alternativa, x_i, se obtiene el grado de consenso lingüístico en la alternativa, CA_i, de forma parecida a como se hizo en A.2.

$$\{CA_1 = N, CA_2 = N, CA_3 = N, CA_4 = N\}.$$

B.3. *Proximidad Lingüística en una Alternativa*

A partir de los conjuntos de coincidencia difusa, C_i, en cada alternativa, x_i, y para cada individuo e_k, se obtiene las proximidades lingüísticas en la alternativa, PA_i^k, como se hizo en A.3, resultando que $PA_i^1 = PA_i^2 = PA_i^3 = PA_i^4 = N$, $\forall i$, excepto para e_4 y x_1 donde $PA_1^4 = M$.

C. Nivel de la Relación

C.1. *Coincidencia Difusa en la Relación*

A partir de los grados de relevancia de las alternativas, $\mu_R(i)$, de los conjuntos de coincidencia difusa de cada alternativa, C_i, a través de la función conjuntiva $LC_2^{\rightarrow}$ y del operador de agregación lingüística LOWA, $\phi_{Q_a^1}$, con el vector de ponderación $W = 0, 0, 0.5, 0.5]$, para la relación, P, se obtiene su conjunto de coincidencia difusa como el subconjunto difuso de coincidencia de E^2, C, resultando:

$$C = \{(e_{ij}, N),\ \forall i, j\}.$$

C.2. *Grado de Consenso Lingüístico en la Relación*

A partir del conjunto de coincidencia difusa, C, para la relación, P, se obtiene el grado de consenso lingüístico en la relación, CR, de forma similar a como se hizo en A.2.

$$CR = N.$$

C.3. *Proximidad Lingüística en la Relación*

A partir del conjunto de coincidencia difusa, C, en la relación , P, y para cada individuo e_k, se obtiene las proximidades lingüísticas en la relación, PR^k, como hicimos en A.3, resultando $PR^k = N$, $\forall e_k$.

Del análisis de los resultados alcanzados en este ejemplo se puede deducir:

- En general, el grado de consenso es bajo.
- Sobre los pares de alternativas (x_2, x_3) y (x_4, x_2) no hay consenso entre los individuos.
- Se puede observar que los grados de coincidencia difusa en el nivel de opinión de los pares de alternativas presentan valores, en general, en torno al valor medio, lo cual debería redundar en valores de los grados de consenso más altos, y no al revés, como sucede. Esto es debido a la influencia del operador de transformación de información ponderada elegido y del cuantificador. Por ejemplo si escogemos como operador de transformación el operador conjuntivo $LC_1^{\rightarrow}$, entonces

$CP_{12} = M$, e igual ocurriría para otros grados de consenso. Del mismo modo si escogemos otro cuantificador, por ejemplo, "al menos la mitad", y manteniendo $LC_2^{\rightarrow}$, entonces $CP_{12} = A$. Por tanto hemos de escoger adecuados operadores de transformación y cuantificadores, acordes con nuestra idea de consenso,

- Con las proximidades ocurre lo mismo que con los grados de consenso por la misma razón, en general son muy bajas, nunca llegan al valor medio. Además este es un efecto que se multiplica cuando avanzamos en los niveles de opinión.
- En vista de los resultados, el moderador debe aconsejar a los individuos $\{e_1, e_2, e_3\}$ que disminuyan su desacuerdo entre ellos. Sería bueno replantearse el cambiar el operador de transformación y el cuantificador de cara a suavizar sus efectos pesimistas sobre las medidas de consenso.

□

3.7 Un Modelo de Consenso Lingüístico Racional

En toda situación de TDG, es normal que los individuos además de presentar opiniones enfrentadas o divergentes, presenten inconsistencias en sus opiniones, es decir, incoherencias en sus preferencias sobre el conjunto de alternativas. Esto puede ocasionar que el proceso de TDG desemboque en soluciones consensuadas poco selectivas (que incorporen todas las alternativas) e incluso, distorsionadas (que no incorporen las mejores alternativas). Por tanto, sería bueno intentar eliminar esas inconsistencias de sus preferencias al mismo tiempo que se lleva a cabo el proceso de consenso. Este es el objetivo que subyace en el modelo de consenso lingüístico racional que presentamos en esta sección.

3.7.1 Arquitectura del Modelo de Consenso Lingüístico Racional

Como hemos visto, en las secciones anteriores, todo modelo de consenso trata de disminuir las divergencias entre las opiniones de los individuos con objeto de hallar una solución consensuada lo más posible. Por tanto, un modelo de consenso racional trata de minimizar las divergencias entre las opiniones de los individuos y las inconsistencias en sus opiniones con objeto de hallar una solución consensuada racional. Para lograrlo, incorpora una medida de consistencia en el proceso de consenso, la cual mide el grado de consistencia de cada individuo en cada momento del proceso de consenso. Esta medida junto con la medida de consenso dan al moderador toda la información necesaria para coordinar el proceso de consenso con vistas a lograr reducir las divergencias e inconsistencias. En consecuencia, un modelo de consenso racional esta guiado por dos tipos de medidas: (i) medidas de consenso y (ii) de racionalidad.

En este sentido, como complemento a los modelos de consenso lingüísticos propuestos en la sección anterior, presentamos un modelo de consenso lingüístico racional guiado por dos tipos de medidas: (i) medidas de consenso lingüísticas y (ii) medidas de consistencia lingüísticas. Las medidas de consenso se corresponden con las dadas en los modelos lingüísticos de la sección anterior, es decir, tenemos grados de consenso lingüísticos y proximidades lingüísticas, aplicados en los tres niveles de opinión. Las medidas de consistencia que se proponen tratan de resolver dos de las cuestiones que plantea el problema de consistencia en TDG, a saber:

- cuándo un individuo, considerado individualmente, se dice que es racional en sus preferencias, y
- cuándo un grupo de individuos se dice racional.

Por tanto, tenemos dos niveles de evaluación del estado de consistencia: nivel del individuo y nivel del conjunto de individuos. Por ello, se proponen dos tipos de medidas de consistencia, dependiendo del nivel de evaluación:

1. **Medidas de Consistencia Lingüísticas Individuales:** miden el grado de con-

sistencia existente en las preferencias de cada individuo.

2. **Medidas de Consistencia Lingüísticas Colectivas:** evalúan el grado de consistencia existente en las preferencias de todo el grupo de individuos.

Este modelo de consenso racional, que aquí proponemos, se acomoda a la arquitectura que se muestra en la figura 3.9.

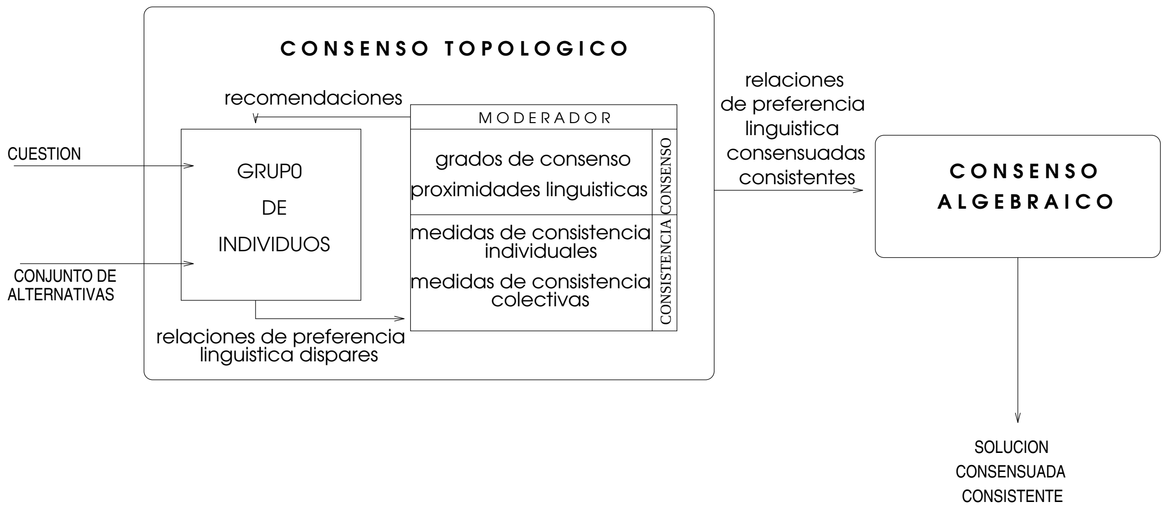

Figura 3.9. Arquitectura del Modelo de Consenso Lingüístico Racional.

Además, ambos tipos de medidas de consistencia se pueden obtener en base a dos tipos de aspectos:

1. *Aspectos cualitativos* de las preferencias, es decir, de acuerdo a la intensidad de la naturaleza de la inconsistencias detectadas.

2. *Aspectos cuantitativos* de las preferencias, es decir, de acuerdo al número o cantidad de inconsistencias detectadas.

Por tanto, trabajamos con cuatro medidas de consistencia como se muestra en la figura 3.10: medida de consistencia lingüística individual cualitativa, medida de consistencia lingüística colectiva cualitativa, medida de consistencia lingüística individual cuantitativa, medida de consistencia lingüística colectiva cuantitativa.

			MEDIDAS DE CONSISTENCIA	
			PERSPECTIVA CUALITATIVA	PERSPECTIVA CUANTITATIVA
NIVEL DE EVALUACION	NIVEL 1	INDIVIDUO e_k	MEDIDA DE CONSISTENCIA LINGUISTICA INDIVIDUAL CUALITATIVA	MEDIDA DE CONSISTENCIA LINGUISTICA INDIVIDUAL CUANTITATIVA
	NIVEL 2	GRUPO DE INDIVIDUOS E	MEDIDA DE CONSISTENCIA LINGUISTICA COLECTIVA CUALITATIVA	MEDIDA DE CONSISTENCIA LINGUISTICA COLECTIVA CUANTITATIVA

Figura 3.10. Medidas de Consistencia Lingüísticas

3.7.2 Esquema de Obtención de las Medidas del Modelo de Consenso Lingüístico Racional

El esquema de obtención de las medidas del modelo de consenso lingüístico racional está compuesto de dos procesos:

- **Proceso de Determinación de Consenso,** donde se calculan las medidas de consenso.
- **Proceso de Determinación de Consistencia,** donde se calculan las medidas de consistencia.

Ambos procesos se desarrollan en paralelo en cada paso del proceso de consenso hasta que se consiguen grados de consenso y consistencia aceptables. El proceso de determinación de consenso se ajusta a cualquiera de los esquemas de obtención vistos en la sección anterior. Concretamente, en la figura 3.11 se muestra el enfoque de obtención de la medidas de un modelo de consenso lingüístico racional cuyo proceso de determinación de consenso se ajusta al esquema de obtención basado en coincidencia rígida y flexible.

El proceso de medición de consistencia es un proceso secuencial compuesto de dos procesos:

1. **Proceso de Detección.** A partir de las relaciones de preferencia lingüística detecta el conjunto de inconsistencias (conjunto de ciclos de preferencia inconsistentes).

Figura 3.11. Esquema de Obtención del Modelo de Consenso Lingüístico Racional

2. **Proceso de Cálculo.** En base a las inconsistencias detectadas se obtienen las medidas de consistencias lingüísticas.

A continuación analizamos en detalle el proceso de determinación de consistencia.

3.7.3 Proceso de Determinación de Consistencia

Intentar dar una formalización concreta del concepto general de racionalidad resulta complejo. Sin embargo, si el problema de definición de la racionalidad se enfoca desde el punto de vista de las opiniones de los individuos, es decir, si se analiza en base a las preferencias de los individuos, parece más o menos posible dar una caracterización del concepto de racionalidad [13]. En este sentido, la racionalidad se define como una combinación de la consistencia explícita e implícita de las preferencias de los individuos [13]. La consistencia explícita hace referencia a la ausencia de contradicciones explícitas, y la consistencia implícita se relaciona con los juicios de valor (y su uso) en base a los que se expresan las opiniones.

En un contexto crisp, donde cada individuo expresa su opinión sobre los pares de alternativas de X mediante una relación de preferencia binaria, R, el concepto de consistencia se ha definido tradicionalmente en términos de aciclidad [68], es decir, de ausencia de secuencias como $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ($x_{k+1} = x_1$) con $x_j \; R \; x_{j+1} \; \forall \, j = 1, \ldots, k$, en las relaciones binarias, o ausencia de ciclos. Por otro lado, en un contexto difuso, donde cada individuo expresa sus opiniones mediante relaciones de preferencia difusas, P, una forma bien conocida de caracterizar la consistencia es a través de la MAX-MIN transitividad [97]. Por tanto, en ambos contextos, un individuo se considera consistente o no si su respectiva relación de preferencia es o no es acíclica (MAX-MIN transitiva, respectivamente), y por tanto, en este sentido, la consistencia se entiende como una propiedad crisp. Sin embargo, de acuerdo con Montero [59, 60], asumimos que la consistencia de los individuos es claramente un concepto difuso, ya que las opiniones de un individuo se pueden considerar más consistentes que las de otro en cierto grado. Bajo esta perspectiva, la consistencia se puede ver como un conjunto difuso caracterizado por una función de pertenencia, llamada medida de racionalidad difusa, que asigna a cada individuo un valor de consistencia (grado) entre 0 (inconsistencia absoluta) y 1 (consistencia absoluta), y de este modo, estable una clasificación difusa de los individuos. En este sentido, en [59, 60] se propone una medida de racionalidad difusa que se basa en una suma ponderada concreta de todos los caminos acíclicos, y en [13] una definición axiomática que toda medida de racionalidad difusa consistente explícitamente debe satisfacer. Aquí, dado que trabajamos con relaciones de preferencia lingüísticas, proponemos varias medidas de consistencia lingüísticas. Concretamente presentamos dos tipos de medidas de consistencia: (i) medidas de consistencia lingüísticas individuales para medir la consistencia de un individuo, y (ii) medidas de consistencias lingüística colectivas, para medir la consistencia del grupo de individuos.

Sus definiciones se basan en la idea de aciclidad de Sen [68] y, siguiendo la definición de racionalidad difusa dada en [59, 60], pero asumiendo un contexto lingüístico. Estas medidas, como hemos mencionado, se calculan en dos procesos, el proceso de detección y el de cálculo, que pasamos a estudiar.

1. Proceso de Detección

   Dado que nuestras medidas de consistencia se basan en los ciclos de preferencia inconsistentes existentes en las relaciones de preferencia de los individuos, el principal objetivo de este proceso es la detección del conjunto de ciclos de preferencia inconsistentes de cada relación. Para conseguirlo, los ciclos no se detectan directamente en las relaciones iniciales, sino en las respectivas relaciones de preferencia estrictas, ya que en éstas se observan claramente los valores de preferencia reales existentes entre las alternativas. La relación estricta de una dada se obtiene en el sentido propuesto por Orlovski [63], como sigue.

   Definición 3.7.1 *Sea P una relación de preferencia lingüística completa y recíproca débil de $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ evaluada en el conjunto de etiquetas S*

   $$\mu_P : X\text{x}X \rightarrow S.$$

   Entonces, P^s=(p^s_{ij}) es una relación de preferencia lingüística estricta evaluada en el conjunto de etiquetas, $S' = S \cup \{\emptyset\}$,

   $$\mu_{P^s} : X\text{x}X \rightarrow S',$$

   tal que o

   $$p^s_{ij} = \emptyset \ \ si \ \ p_{ij} < p_{ji},$$

   o bien

   $$p^s_{ij} = s_k \in S \ si \ p_{ij} \geq p_{ji} \ con \ p_{ij} = s_l, \ p_{ji} = s_t \ y \ l = t + k.$$

   Por tanto, trabajando con relaciones de preferencia estrictas, un par de alternativas, (x_i, x_j), puede presentar cualquiera de estas tres relaciones básicas:

(a) *Relación de preferencia (R):* x_i se prefiere a x_j, y por tanto,

$$x_i \; R \; x_j \Longleftrightarrow p_{ij}^s > s_0.$$

(b) *Relación de No preferencia (RN):* x_i no se prefiere a x_j, y por tanto,

$$x_i \; RN \; x_j \Longleftrightarrow p_{ij}^s = \emptyset.$$

(c) *Relación de Indiferencia (I):* x_i es indiferente a x_j, y por tanto,

$$x_i \; I \; x_j \Longleftrightarrow p_{ij}^s = s_0.$$

Las relaciones inversas de cada relación (R, RN, I) se definen como:

(a) $R^{-1} = RN$.

(b) $RN^{-1} = R$.

(c) $I^{-1} = I$.

Definición 3.7.2 *Observando P^s, es claro que dada una cadena de alternativas distintas, $x_1 - x_2 - \ldots - x_k - x_1$ $(k \geq 3)$, será un ciclo de preferencia inconsistente, si y sólo si $x_1 R_1 x_2 R_2 \ldots x_k R_k x_1$, de modo que o:*

caso 1: $R_h \in \{R, \; I\}$ $\forall h = 1, 2, \ldots, k$ *y* $R \in \{R_h : h = 1, 2, \ldots, k\}$, *llamado "ciclo de preferencia inconsistente positivo"; o*

caso 2: $R_h \in \{RN, \; I\}$ $\forall h = 1, 2, \ldots, k$ *y* $RN \in \{R_h : h = 1, 2, \ldots, k\}$, *llamado "ciclo de preferencia inconsistente negativo".*

En otras palabras, una cadena de alternativas será un ciclo de preferencia inconsistente en cada caso, si R_h es R (RN respectivamente) o I, pero tomando al menos una vez el valor R (RN respectivamente).

Lema 3.7.3 *Sea P^s una relación de preferencia lingüística estricta asociada a una relación de preferencia lingüística, P, si $x_1 R_1 x_2 R_2 \ldots x_k R_k x_1$ es un ciclo de preferencia inconsistente positivo (negativo) de P^s, entonces $x_1 R_k^{-1} x_k \ldots R_2^{-1} x_2 R_1^{-1} x_1$ es un ciclo de preferencia inconsistente negativo (positivo) de P^s.*

Demostración.

Su demostración es evidente. □

Por este lema 3.7.3, o bien se buscan ciclos de preferencia inconsistentes positivos, o bien negativos, pero no ambos a la vez. Aquí, optamos por la primera opción.

Teorema 3.7.4 *Sea P^s una relación de preferencia lingüística estricta asociada a una relación de preferencia lingüística, P, entonces cualquier ciclo de preferencia inconsistente positivo (negativo) de alternativas diferentes, $G = x_1R_1x_2R_2 \ldots x_kR_kx_1$ ($k \geq 4$), implica al menos un ciclo de preferencia inconsistente de 3 alternativas diferentes.*

Demostración.

Demostraremos el teorema sólo para los ciclos positivos, dado que para los ciclos negativos se hace de forma similar. La demostración se hace por inducción sobre el número de alternativas distintas (k) que componen un ciclo.

- Para $k = 4$

  Sea $G = x_1R_1x_2R_2x_3R_3x_4R_4x_1$ un ciclo de preferencia inconsistente positivo. A partir de la definición de un ciclo de preferencia inconsistente positivo, sabemos que al menos $\exists h \in \{1, 2, 3, 4\}$, tal que $R_h = R$. Entonces por casos:

  (a) Si $h = 1$, sin pérdida de generalidad, podemos considerar la cadena $G' = x_1 - x_2 - x_3 - x_1$, la cual presenta la siguiente estructura de relaciones,

  $$x_1Rx_2R_2x_3R^?x_1, \text{ con } R_2 \in \{R, I\} \text{ y } R^? \in \{R, RN, I\}.$$

  Entonces,

  i. Si $R^? \in \{R, I\}$, claramente la cadena considerada, $G' = x_1 - x_2 - x_3 - x_1$, es un ciclo de preferencia inconsistente positivo de 3 alternativas diferentes.

  ii. Si $R^? = RN$, entonces claramente la cadena $G'' = x_1 - x_4 - x_3 - x_1$ es un ciclo de preferencia inconsistente negativo de 3 alternativas diferentes, que tiene esta estructura de relaciones,

  $$x_1R_4^{-1}x_4R_3^{-1}x_3 \; RN \; x_1.$$

(b) Si $h = 2$, sin pérdida de generalidad, podemos considerar la cadena, $G' = x_2 - x_3 - x_4 - x_2$, la cual presenta la siguiente estructura de relaciones,

$$x_2 R x_3 R_3 x_4 R^? x_2, \text{ con } R_3 \in \{R, I\} \text{ y } R^? \in \{R, RN, I\}.$$

Entonces,

i. Si $R^? \in \{R, I\}$, claramente la cadena considerada, $G' = x_2 - x_3 - x_4 - x_2$, es un ciclo de preferencia inconsistente positivo de 3 alternativas diferentes.

ii. Si $R^? = RN$, obviamente la cadena, $G'' = x_1 - x_4 - x_2 - x_1$ es un ciclo de preferencia inconsistente negativo de 3 alternativas diferentes, que posee la siguiente estructura,

$$x_1 R_4^{-1} x_4 RN x_2 R_1^{-1} x_1.$$

(c) Si $h \in \{3, 4\}$, sin pérdida de generalidad, podemos considerar la cadena, $G' = x_1 - x_3 - x_4 - x_1$, que presenta la siguiente estructura,

$$x_1 R^? x_3 R_3 x_4 R_4 x_1, \text{ con } R_h = R, \text{y } R_i \in \{R, I\}, \ i \in \{3, 4, \ i \neq h\}.$$

Entonces,

i. Si $R^? \in \{R, I\}$, entonces la cadena considerada, $G' = x_1 - x_3 - x_4 - x_1$, es un ciclo de preferencia inconsistente positivo de 3 alternativas diferentes.

ii. Si $R^? = RN$, evidentemente la cadena, $G'' = x_1 - x_3 - x_2 - x_1$ es un ciclo de preferencia inconsistente negativo de 3 alternativas diferentes, cuya estructura es,

$$x_1 RN x_3 R_2^{-1} x_2 R_2^{-1} x_1.$$

En consecuencia, si hay un ciclo de preferencia inconsistente positivo de 4 alternativas diferentes, entonces existe al menos un ciclo de preferencia inconsistente de 3 alternativas diferentes.

– Supongamos esto cierto para $k - 1$ y, es decir, admitimos que si hay un ciclo de preferencia inconsistente positivo de $k - 1$ alternativas diferentes, entonces existe al menos un ciclo de preferencia inconsistente de 3 alternativas diferentes.

– Pasemos a demostrarlo para k.

Sea $G = x_1R_1x_2R_2 \ldots R_{k-1}x_kR_kx_1$ un a ciclo de preferencia inconsistente positivo detectado en P^s. Entonces, por definición de un ciclo de preferencia inconsitente positivo 3.7.2, sabemos que al menos $\exists h \in \{1, 2, \ldots, k\}$, tal que, $R_h = R$. Pero:

(a) Si $h = 1$, entonces, sin pérdida de generalidad, podemos considerar la cadena, $G' = x_1 - x_2 - \ldots - x_{k-1} - x_1$, cuya estructura de relaciones es de la siguiente forma,

$$x_1Rx_2R_2 \ldots R_{k-2}x_{k-1}R^?x_1, \text{ con } R_i \in \{R, I\}, \ i = 2, \ldots, k-2,$$

y $R^? \in \{R, RN, I\}$.

Entonces,

i. Si $R^? \in \{R, I\}$, claramente la cadena considerada, $G' = x_1 - x_2 - \ldots - x_{k-1} - x_1$, es un ciclo de preferencia inconsistente positivo de $k-1$ alternativas diferentes, y por hipótesis de inducción, G' implica al menos un ciclo de preferencia inconsistente de 3 alternativas diferentes, y por tanto, G implica al menos un ciclo de preferencia inconsistente de 3 alternativas diferentes.

ii. Si $R^? = RN$, obviamente la cadena, $G'' = x_1 - x_k - x_{k-1} - x_1$ es un ciclo de preferencia inconsistente negativo de 3 alternativas diferentes, con su estructura,

$$x_1R_k^{-1}x_kR_{k-1}^{-1}x_{k-1} \ RN \ x_1.$$

(b) Si $h = 2$, sin pérdida de generalidad, podemos considerar la cadena, $G' = x_2 - x_3 - x_4 \ldots - x_k - x_2$, y su estructura,

$$x_2Rx_3R_3x_4 \ldots R_{k-1}x_kR^?x_2, \text{ con} R_i \in \{R, I\}, \ i = 3, \ldots, k-1,$$

y $R^? \in \{R, RN, I\}$.

Entonces,

i. Si $R^? \in \{R, I\}$, evidentemente la cadena considerada, $G' = x_2 - x_3 - x_4 \ldots - x_k - x_2$ es un ciclo de preferencia inconsistente positivo de $k-1$

alternativas diferentes. Por hipótesis de inducción, G' implica al menos un ciclo de preferencia inconsistente de 3 alternativas diferentes, y por tanto, G implica al menos un ciclo de preferencia inconsistente de 3 alternativas diferentes.

ii. Si $R^? = RN$, claramente la cadena, $G'' = x_1 - x_k - x_2 - x_1$ es un ciclo de preferencia inconsistente negativo de 3 alternativas diferentes, que tiene la siguiente estructura de relaciones,

$$x_1 R_k^{-1} x_k \; RN \; x_2 R_1^{-1} x_1.$$

(c) Si $h \in \{3, \ldots, k\}$, de nuevo, sin pérdida de generalidad, podemos considerar la cadena, $G' = x_1 - x_3 - x_4 - \ldots - x_k - x_1$, relacionada de esta forma,

$$x_1 R^? x_3 R_3 x_4 \ldots R_{k-1} x_k R_k x_1, \text{ con } R_h = R \text{ y } R_i \in \{R, I\},\ i = 3, \ldots, k, i \neq h.$$

Entonces,

i. Si $R^? \in \{R, I\}$, claramente la cadena considerada, $G' = x_1 - x_3 - x_4 - \ldots - x_k - x_1$ es un ciclo de preferencia inconsistente positivo de $k-1$ alternativas diferentes, y por hipótesis de inducción, entonces G' implica al menos un ciclo de preferencia inconsistente de 3 alternativas diferentes, y por tanto, G implica al menos un ciclo de preferencia inconsistente de 3 alternativas diferentes.

ii. Si $R^? = RN$, evidentemente la cadena, $G'' = x_1 - x_3 - x_2 - x_1$ es un ciclo de preferencia inconsistente negativo de 3 alternativas diferentes, cuya estructura de relaciones es,

$$x_1 RN x_3 R_2^{-1} x_2 R_1^{-1} x_1.$$

□

Por tanto, en base al lema 3.7.3 y teorema 3.7.4 se justifica el usar sólo los ciclos de preferencia inconsistentes positivos de 3 alternativas diferentes para definir nuestras medidas de consistencia, y por esa razón, en este proceso de detección sólo se detectarán los conjuntos de ciclos de preferencia inconsistentes positivos de 3 alternativas diferentes de cada relación de preferencia lingüística, P^k, notados como C^k, $\forall e_k \in E$.

2. Proceso de Cálculo

En este proceso, definimos varias medidas de consistencia lingüísticas a partir de los conjuntos de ciclos de preferencia inconsistentes detectados en el proceso de detección. Como hemos anticipado al comienzo de esta sección, presentamos dos tipos de medidas de consistencia lingüísticas, distiguiendo entre dos niveles de evaluación: (i) nivel del individuo, y (ii) nivel del grupo de individuos, y entre dos perspectivas de evaluación: (i) perspectiva cualitativa, y (ii) cuantitativa. Estos tipos son:

(a) **Medidas de Consistencia Lingüísticas Individuales.** Evalúa el grado de consistencia existente en las preferencias de cada individuo. Este tipo de medidas ayuda al moderador en sus consejos a los individuos durante el proceso de consenso. Las medidas de consistencia lingüística individuales que definimos son dos, la medida de consistencia lingüística individual cualitativa y la cuantitativa.

(b) **Medidas de Consistencia Lingüísticas Colectivas.** Miden el grado de consistencia existente en las preferencias de todo el grupo de individuos. Este tipo de medidas, junto con los grados de consenso lingüísticos, ayudan al moderador a decidir sobre la continuidad del proceso de consenso. De igual modo, las medidas de consistencia lingüística colectivas que definimos son dos, la medida de consistencia lingüística colectiva cualitativa y la cuantitativa.

Las medidas de consistencia se obtienen como muestra la figura 3.12. Estas medidas se definen en un contexto de TDG heterogéneo del tipo C visto en el apartado 1.3.4, es decir, asumiendo grados de importancia, $\mu_E(k)$, para cada individuo, e_k, evaluados lingüísticamente en el mismo conjunto de etiquetas usado para expresar las opiniones de los individuos. Concretamente, es el mismo contexto que se usa para desarrollar el modelo de consenso lingüístico guiado por medidas de consenso lingüísticas maximales (apartado 3.5). A continuación, explicamos el esquema del proceso de cálculo representado.

(a) **Medidas de Consistencia Lingüísticas Individuales**

i. *Medida de Consistencia Lingüística Individual Cualitativa*

Esta medida proporciona una perspectiva cualitativa de la situación de consistencia existente en la relación de preferencia lingüística de cada individuo.

Evalúa la calidad de la consistencia de los individuos de acuerdo al tipo de relaciones existente en los ciclos de preferencia inconsistentes detectados en sus respectivas relaciones de preferencia lingüísticas estrictas. Se basa en la medida de racionalidad difusa de Montero [59, 60], que se basa en el grado de aciclidad de una relación de preferencia y se calcula usando ponderaciones numéricas que se obtienen a partir de las relaciones existentes entre las alternativas de todos los posibles ciclos de preferencia consistentes de la relación de preferencia. Nuestra medida se basa en el grado de no aciclidad, y se calcula usando sólo los pesos lingüísticos obtenidos a partir de las relaciones existentes entre las alternativas que componen los ciclos de preferencia inconsistente positivos de 3 alternativas diferentes detectados en la relación de preferencia lingüística estricta. Por tanto, esta medida es una medida basada en pesos lingüísticos. Se calcula para cada individuo, e_k, y se nota como CI_a^k. Cualquier ciclo de preferencia inconsistente positivo, $c_i^k \in C^k$, presenta la siguiente estructura

$$x_t - x_v - x_w - x_t,\ \forall t, v, w \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Entonces, para cada ciclo c_i^k, definimos su peso lingüístico, z_i^k, como

$$z_i^k = MIN\{p_{tv}^s, p_{vw}^s, p_{wt}^s\}.$$

Por tanto, CI_a^k se obtiene de acuerdo a la siguiente expresión,

$$CI_a^k = \begin{cases} NEG(NA^k) & \text{si } C^k \neq \emptyset \\ s_T & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $NA^k{=}MAX_i\{z_i^k,\ i = 1, \ldots, \sharp(C^k)\}$ es el grado de no aciclidad de la relación P^k.

ii. *Medida de Consistencia Lingüística Individual Cuantitativa*

Esta medida aporta una perspectiva cuantitativa de la situación de consistencia existente en la relación de preferencia lingüística de cada individuo. Evalúa la cantidad de consistencia de los individuos, expresada en función del número de ciclos consistentes obtenidos, a partir de los ciclos de preferencia inconsistentes positivos de 3 alternativas diferentes detectados en sus respectivas relaciones de preferencia estrictas. Por tanto, esta medida es una medida basada en ciclos inconsistentes. Se nota, CI_b^k, y se obtiene usando el concepto de mayoría difusa representado por un cuantificador difuso lingüístico, Q^2. El concepto de mayoría expresado aquí no se corresponde con ninguno de los vistos. No obstante, se puede interpretar como un tipo de mayoría difusa de alternativas, ya que cuantifica ciclos de alternativas.

Sea, c_t, el cardinal del conjunto de todos los posibles ciclos de 3 alternativas diferentes detectados en un conjunto de n alternativas. Entonces, c_t se determina por combinación de n elementos tomados de 3 en 3, de acuerdo a la siguiente expresión,

$$c_t = \binom{n}{3}.$$

Un individuo, e_k, presenta la siguiente proporción de ciclos inconsistentes de 3 alternativas diferentes, r^k,

$$r^k = \sharp(C^k)/c_t,$$

y la medida de consistencia lingüística individual cuantitativa para él se obtiene como,

$$CI_b^k = Q^2(1 - r^k).$$

Nota. Estas dos medidas de consistencia individuales, claramente, adoptan distintas concepciones del concepto de consistencia, que a veces, pueden ocasionar situaciones contradictorias. Por ejemplo, puede existir un individuo, e_k, con sólo un ciclo de preferencia inconsistente positivo de 3 alternativas diferentes con un peso lingüístico de valor máximo, s_T. Entonces CI_a^k alcanzaría un valor muy alto, y sin embargo, CI_b^k, sería muy bajo. Por tanto, hemos de intentar lograr un equilibrio entre ambas medidas, y en particular, ha de hacerlo el moderador antes de aconsejar a los individuos.

(b) **Medidas de Consistencia Lingüísticas Colectivas**

Estas medidas se definen fácilmente a partir de las medidas individuales. Por tanto tenemos dos medidas colectivas:

i. *Medida de Consistencia Lingüística Colectiva Cualitativa (CC_a).*

ii. *Medida de Consistencia Lingüística Colectiva Cuantitativa (CC_b).*

Ambas se obtienen a partir de las medidas de consistencia individuales, considerando los grados de importancias de los individuos, $\mu_E(k)$, mediante el operador de agregación lingüística LOWA, ϕ_{Q^1}, guiado por cuantificadores, Q^1, que representan el concepto de mayoría difusa de individuos. Sus respectivas expresiones de definición son:

$$CC_a = \phi_{Q^1}((CI_a^1 \wedge \mu_E(1)), \ldots, (CI_a^m \wedge \mu_E(m))),$$

$$CC_b = \phi_{Q^1}((CI_b^1 \wedge \mu_E(1)), \ldots, (CI_b^m \wedge \mu_E(m))),$$

respectivamente.

Nota. Es importante destacar que estas medidas se pueden usar como un criterio para validar la solución final que se obtenga al problema de TDG. Valores de las medidas de consistencia colectiva próximos a s_T indican una solución consensuada racional mejor, y valores alejados de s_T indican una solución peor. En cualquier caso, como sucede con las anteriores medidas de consistencia, el moderador ha de usarlas intentando buscar un equilibrio entre ambas.

A continuación, se presenta un ejemplo de cómo calcular la consistencia en un momento de un proceso de consenso dado.

Ejemplo 3.7.5 Aplicamos el proceso de determinación a partir de los datos dados en el ejemplo del apartado 3.5.1 del modelo de consenso lingüístico guiado por medidas de consenso maximales (apartado 3.5). Recordemos que las relaciones de preferencia de los cuatro individuos eran

$$P^1 = \begin{bmatrix} - & B & AI & MB \\ A & - & MA & AI \\ B & B & - & MB \\ AI & M & MA & - \end{bmatrix} P^2 = \begin{bmatrix} - & A & M & MB \\ M & - & MA & M \\ M & B & - & MB \\ MA & A & AI & - \end{bmatrix}$$

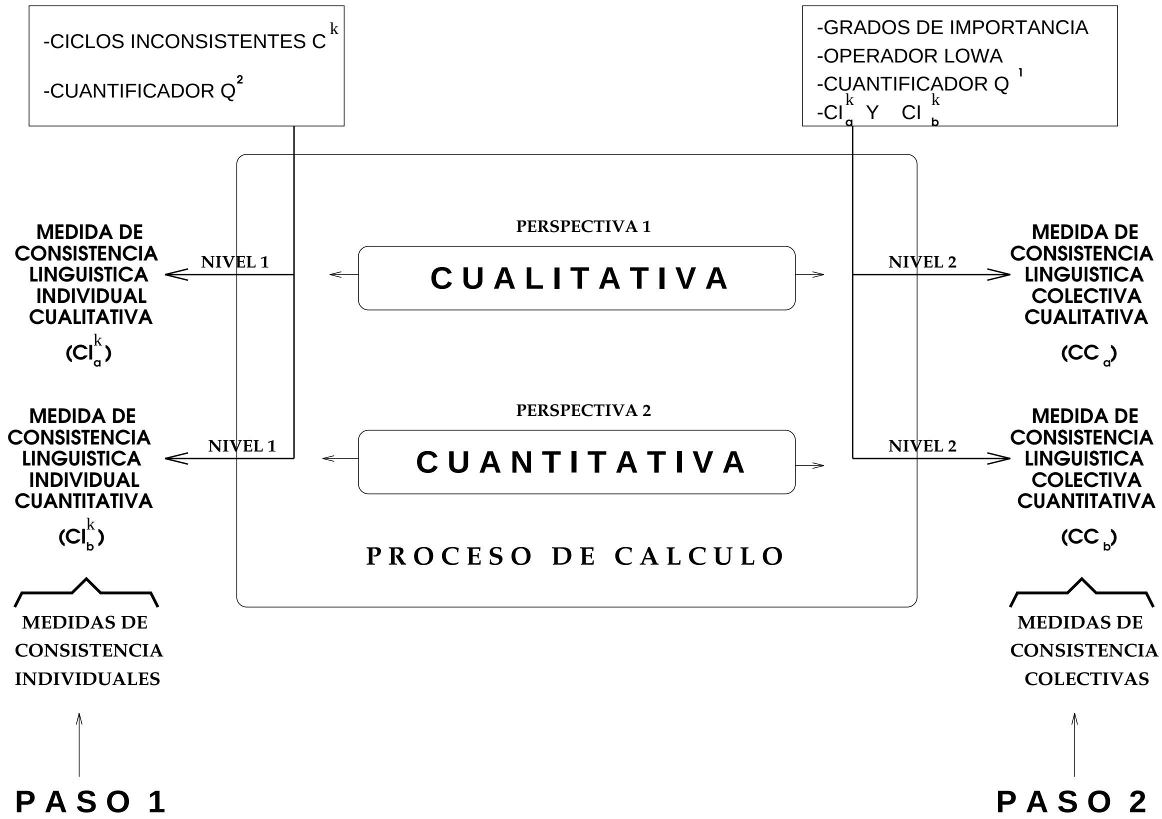

Figura 3.12. Proceso de Cálculo de las Medidas de Consistencia

$$P^3 = \begin{bmatrix} - & AI & T & N \\ M & - & A & B \\ BI & M & - & MB \\ T & AI & MA & - \end{bmatrix} P^4 = \begin{bmatrix} - & B & A & B \\ AI & - & M & B \\ M & MA & - & MB \\ T & A & T & - \end{bmatrix}$$

Entonces, para cada una de ellas hallamos su relación de preferencia estricta, $P^{k,s}$.

$$P^{1,s} = \begin{bmatrix} - & \emptyset & M & \emptyset \\ MB & - & B & B \\ \emptyset & \emptyset & - & M \\ A & \emptyset & \emptyset & - \end{bmatrix} P^{2,s} = \begin{bmatrix} - & MB & N & \emptyset \\ \emptyset & - & B & \emptyset \\ N & \emptyset & - & \emptyset \\ M & BI & A & - \end{bmatrix}$$

$$P^{3,s} = \begin{bmatrix} - & B & AI & \emptyset \\ \emptyset & - & BI & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & - & \emptyset \\ T & M & M & - \end{bmatrix} P^{4,s} = \begin{bmatrix} - & \emptyset & BI & \emptyset \\ M & - & \emptyset & MB \\ \emptyset & MB & - & \emptyset \\ A & \emptyset & A & - \end{bmatrix}$$

Los conjuntos de ciclos de preferencia inconsistentes positivos de 3 alternativas diferentes detectados en el proceso de detección son los siguientes:

- Individuo e_1: $C^1 = \{(x_1, x_3, x_4, x_1)\}$
- Individuo e_2: $C^2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_1)\}$
- Individuo e_3: $C^3 = \{\emptyset\}$
- Individuo e_4: $C^4 = \{(x_1, x_3, x_2, x_1), (x_2, x_4, x_3, x_2)\}$

Entonces, las medidas de consistencia lingüísticas quedan como sigue,

A Medidas de Consistencia Lingüísticas Individuales

A.1 *Medida de Consistencia Lingüística Individual Cualitativa*

Los pesos lingüísticos de los ciclos detectados son los siguientes:

- Peso lingüístico del conjunto C^1: $\{B\}$.
- Peso lingüístico del conjunto C^2: $\{N\}$.
- Peso lingüístico del conjunto C^3: $\{\emptyset\}$.
- Peso lingüístico del conjunto C^4: $\{BI, MB\}$,

donde, por ejemplo, $BI = MIN\{p^{4s}_{13}(BI), p^{4s}_{32}(MB), p^{4s}_{21}(M)\}$. Entonces, los grados de consistencia cualitativos, CI^k_a, de cada individuo, e_k, son

$$\{CI^1_a = A,\ CI^2_a = T,\ CI^3_a = T,\ CI^4_a = AI\}.$$

A.2 *Medida de Consistencia Lingüística Individual Cuantitativa*

El número máximo de ciclos de 3 alternativas diferentes es $c_t = 4$, y por tanto, las proporciones de ciclos detectados, r^k, para cada individuo, e_k, son las siguientes:

- En el individuo e_1: $r^1 = 0.25$.
- En el individuo e_2: $r^2 = 0.25$.
- En el individuo e_3: $r^3 = 0$.
- En el individuo e_4: $r^4 = 0.5$.

Donde, por ejemplo, $r^4 = 2/4$. Entonces, los grados de consistencia cuantitativos , CI_b^k, de cada individuo, e_k, de acuerdo a la idea de mayoría representada por el cuantificador, Q^2, "al menos la mitad", con el par (0,0.5), son:

$$\{CI_b^1 = T,\ CI_b^2 = T,\ CI_b^3 = T,\ CI_b^4 = T\}.$$

B Medidas de Consistencia Lingüísticas Colectivas

B.1 *Medida de Consistencia Lingüística Colectiva Cualitativa*

Usando la variante numérica del mismo cuantificador como Q^1, calculamos el grado de consistencia colectivo cualitativo, CC_a, como:

$$CC_a = \phi_{Q^1}((A \wedge AI), (T \wedge T), (T \wedge B), (AI \wedge BI)) = AI.$$

B.2 *Medida de Consistencia Lingüística Colectiva Cuantitativa*

De forma similar, hallamos el grado de consistencia colectivo cuantitativo, CC_b:

$$CC_b = \phi_{Q^1}((T \wedge AI), (T \wedge T), (T \wedge B), (T \wedge BI)) = T.$$

De acuerdo al concepto de mayoría difusa representado por el cuantificador "al menos la mitad", en el caso de este ejemplo, se pueden extraer las siguientes conclusiones:

1. Desde un punto de vista cuantitativo el conjunto de individuos es más consistente que desde un punto de vista cualitativo.
2. Desde un punto de vista cuantitativo todos los individuos se consideran consistentes, sin embargo, desde un punto de vista cualitativo sólo los individuos e_2 y e_3 se consideran consistentes.

3. Por tanto desde ambos puntos de vista los individuos e_2 y e_3 se consideran consistentes.

4. Si se observa la naturaleza y el número de ciclos de preferencia inconsistentes, el individuo e_3 es el más consistente de todos.

5. El moderador puede considerar esta situación de consistencia como bastante aceptable, por tanto, en este momento la continuidad del proceso de consenso depende más de las medidas de consenso. Como vimos en el ejemplo del modelo del apartado 3.5.1, el grado de consenso era bastante alto. Luego entonces, el moderador debería plantearse parar el proceso de consenso y obtener la solución al problema de TDG.

$\square$

Capítulo 4

Modelos Lingüísticos para la Selección de Alternativas en Problemas de TDG

En este capítulo, estudiamos el problema de la selección de alternativas en situaciones de TDG. Asumiendo que trabajamos con problemas de TDG en contexto lingüístico, presentamos varios modelos de selección de alternativas lingüísticos desarrollados en base a dos esquemas de selección de alternativas, y a dos tipos de grados de selección de alternativas lingüísticos guiados por cuantificador.

En la sección primera, suponiendo que los individuos expresan sus opiniones mediante relaciones de preferencia lingüística, presentamos dos esquemas de selección de alternativas:

- Esquema directo: que propone obtener la solución trabajando directamente sobre el conjunto de relaciones.
- Esquema indirecto: que, a diferencia del anterior, propone obtener la solución trabajando sobre una relación de preferencia lingüística colectiva, que es una relación de preferencia que representa la opinión social del grupo de individuos.

La sección segunda la dedicamos a la presentación de los diferentes grados de selección de alternativas. Estos caracterizan a cada alternativa y son criterios que establecen una clasificación entre las alternativas, y permiten obtener el conjunto de alternativa(s) solución. Usamos grados de dos tipos:

- *Grados de dominancia lingüísticos guiados por cuantificador.* Indican el grado de dominancia de una alternativa sobre todas las demás.
- *Grados de no dominancia lingüísticos guiados por cuantificador.* Expresan el grado de no dominancia del resto de alternativas sobre una dada, y están basados en el concepto de alternativas no dominadas de Orlovski [63].

En ambos el cuantificador representa el concepto de mayoría difusa de alternativas, y dependiendo de como se calculan pueden ser de tres clases:

1. *Grados de selección lingüísticos individuales.* Se calculan para cada alternativa, a partir de la relación de preferencia lingüística individual, de cada individuo, e_k, considerado independiente del resto. Se aplican en esquemas de selección directos.
2. *Grados de selección lingüísticos colectivos.* En este caso, caracterizan a cada alternativa, en base a la relación de preferencia lingüística colectiva obtenida a partir de la agregación de las relaciones de preferencia del grupo de individuos. Se aplican en esquemas de selección indirectos.
3. *Grados de selección lingüísticos sociales.* Se evalúan para cada alternativa, a través de la agregación de los grados de selección lingüísticos individuales obtenidos para dicha alternativa. Por tanto, este tipo de grados se usa siempre junto con los grados individuales, y en consecuencia, se aplican en esquemas de selección directos. La agregación se realiza
   - en contextos homogéneos: mediante el operador de agregación LOWA, guiado por cuantificadores difusos lingüísticos; y
   - en contextos heterogéneos: mediante alguno de los operadores de agregación de información lingüística ponderada guiados por cuantificadores difusos lingüísticos, estudiados en el capítulo segundo.

   En ambos casos, el cuantificador representa el concepto de mayoría difusa de individuos.

Por tanto, trabajamos con los siguientes grados de selección: grado de dominancia lingüístico individual guiado por cuantificador, grado de dominancia lingüístico social guiado por cuantificador, grado de dominancia lingüístico colectivo guiado por cuantificador, grado de no dominancia lingüístico individual guiado por cuantificador, grado de no dominancia lingüístico social guiado por cuantificador, grado de no dominancia lingüístico colectivo guiado por cuantificador.

En las siguientes secciones, en base a los dos esquemas y a los grados de selección de alternativas, tanto para problemas de TDG heterogéneos como homogéneos, presentamos los siguientes modelos de selección de alternativas lingüísticos directos:

- *Modelo de selección lingüístico directo homogéneo (heterogéneo) guiado por dominancia.*
- *Modelo de selección lingüístico directo homogéneo (heterogéneo) guiado por no dominancia.*

Y los siguientes modelos de selección de alternativas lingüísticos indirectos:

- *Modelo de selección lingüístico indirecto homogéneo (heterogéneo) guiado por dominancia.*
- *Modelo de selección lingüístico indirecto homogéneo (heterogéneo) guiado por no dominancia.*

Finalmente, para aquellos casos, en los que la aplicación de uno de los anteriores modelos dé como resultado un conjunto de alternativas solución no unitario, presentamos dos modelos de selección de alternativas lingüísticos combinados que permiten obtener soluciones más específicas:

- *Modelo de selección conjuntivo.* Por ejemplo, si con un modelo directo guiado por dominancia obtenemos una solución con más de una alternativa, desarrollar un modelo de selección conjuntivo consistiría en obtener la solución como la intersección del modelo directo guiado por dominancia con el modelo directo guiado por no dominancia.

- *Modelo de selección secuencial.* En este caso, desarrollar un modelo de selección secuencial consiste en obtener el conjunto de alternativa(s) solución como la siguiente secuencia de pasos: primero se obtiene la solución de acuerdo a uno de ellos, y posteriormente sobre el conjunto solución encontrado, caso de estar formado por más de una alternativa, se aplica el modelo que queda, obteniéndose así la solución final.

4.1 Esquemas de Selección de Alternativas en Problemas de TDG

Como se apuntó en el capítulo anterior, en todo problema de TDG, después de efectuar un proceso de consenso entre los individuos, y una vez que se alcanza un grado de consenso satisfactorio entre ellos, procede aplicar un proceso de selección de alternativas que determine el conjunto de alternativas solución a partir de sus opiniones. Por tanto, un proceso de selección, también llamado consenso algebraico, hace referencia a cómo obtener el conjunto de alternativa(s) solución a partir de las opiniones consensuadas expresadas por los individuos, en nuestro caso, relaciones de preferencia lingüísticas.

Asumiendo que tenemos un conjunto de relaciones de preferencia lingüísticas, $\{P^1, \ldots, P^m\}$, básicamente, se conocen dos esquemas de selección de alternativas:

- *Esquema directo.* Que propone obtener la solución trabajando directamente sobre el conjunto de relaciones.

$$\{P^1, \ldots, P^m\} \rightarrow \text{ solución}$$

- *Esquema indirecto.* En este caso, se obtiene la solución a partir de una relación de preferencia lingüística colectiva, que es una relación de preferencia que representa la opinión social del grupo de individuos.

$$\{P^1, \ldots, P^m\} \rightarrow P^C \rightarrow \text{ solución}$$

Los modelos de selección de alternativas que presentamos en esta memoria, tanto si adoptan el esquema directo como el indirecto, se basan en diversos tipos de grados de selección de alternativas lingüísticos. Estos grados se obtienen a partir de las relaciones de preferencia lingüísticas, expresan lingüísticamente el grado de relevancia de una alternativa dentro del conjunto de alternativas, y actúan selectivamente sobre el conjunto de alternativas durante el proceso de selección. Concretamente, consideramos tres tipos de grados:

1. *Grados de selección lingüísticos individuales.* Se calculan para cada alternativa, x_i, en base a la relación de preferencia lingüística individual, P^k, de cada individuo, e_k, considerado independiente del resto. Se aplican en los modelos de selección directos.

2. *Grados de selección lingüísticos colectivos.* En este caso, se evalúan a partir de la relación de preferencia lingüística colectiva, P^C, del grupo de individuos, E, considerados como un todo. Lógicamente, se aplican en los modelos de selección indirectos.

3. *Grados de selección lingüísticos sociales.* Por último, éstos se obtienen mediante la agregación de los grados de selección lingüísticos individuales obtenidos para dicha alternativa. Por tanto, este tipo de grados se usa siempre junto con los grados individuales, y en consecuencia, se aplican en los modelos de selección directos. La agregaciones se realizan

   - en contextos homogéneos: mediante el operador de agregación de información lingüística no ponderada LOWA, guiado por cuantificadores difusos lingüísticos;
   - en contextos heterogéneos: mediante alguno de los operadores de agregación de información lingüística ponderada, vistos en el capítulo segundo, y que genéricamente notamos WAO (Weighted Aggregation Operator).

   En ambos casos, el cuantificador usado representa el concepto de mayoría difusa de individuos.

Tanto los modelos de selección directos como los indirectos se desarrollan a lo largo de tres estados de actividad:

- **Estado de Agregación.**

  Este estado conlleva agregar las unidades de información lingüísticas individuales en unidades de información lingüística colectivas, bien mediante el operador LOWA (en contextos homogéneos), o bien mediante un operador WAO (en contextos heterogéneos).

  - En modelos de selección directos, estas unidades de información individuales son grados de selección de alternativas, hallados para cada relación de preferencia, y las unidades colectivas son grados de selección sociales.
  - En modelos de selección indirectos, estas unidades de información lingüísticas son cada una de las unidades elementales de una relación de preferencia, es decir, los grados de preferencia, p_{ij}^k, expresados por cada individuo, e_k, sobre cada par de alternativas, (x_i, x_j). Las unidades colectivas son cada uno de los grados de preferencia, p_{ij}^C, de la relación de preferencia colectiva, P^C.

- **Estado de Explotación.**

  En modelos de selección indirectos (directos), conlleva la obtención de los grados de selección de alternativas colectivos (individuales) de cada alternativa en base a las relación(es) de preferencia lingüística(s) colectiva (individuales). Hemos de destacar, que cuando en este estado se usa algún operador de agregación de información (LOWA o WAO) guiado por cuantificadores, el sentido de mayoría que aquí se adopta es el de mayoría difusa de alternativas, diferente al usado en el estado de agregación.

- **Estado de Selección.**

  En este estado se encuentra el conjunto de alternativas solución de acuerdo a la aplicación de los diferentes grados de selección sobre el conjunto de alternativas total.

Dependiendo del modelo de selección estos estados se aplican en un orden o en otro. En modelos de selección directos se suceden como se muestra en la figura 4.1, y en modelos indirectos como se muestra en la figura 4.2.

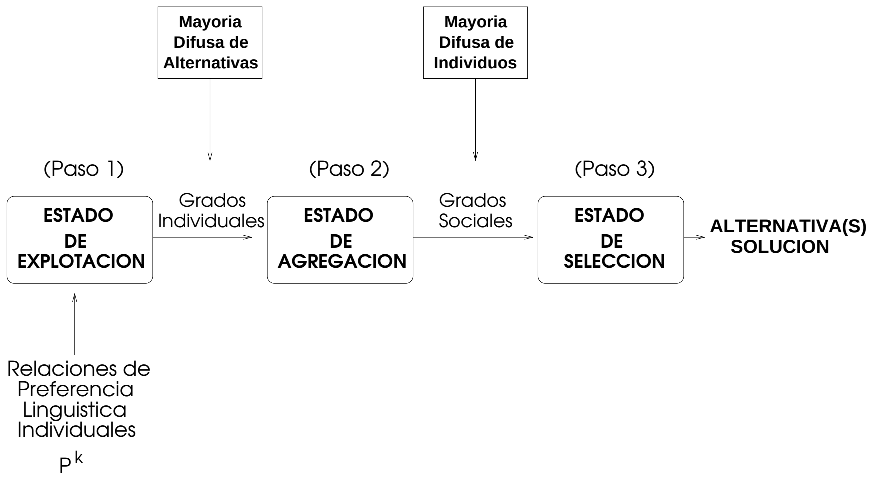

Figura 4.1. Orden de Aplicación de los Estados en Modelos Directos

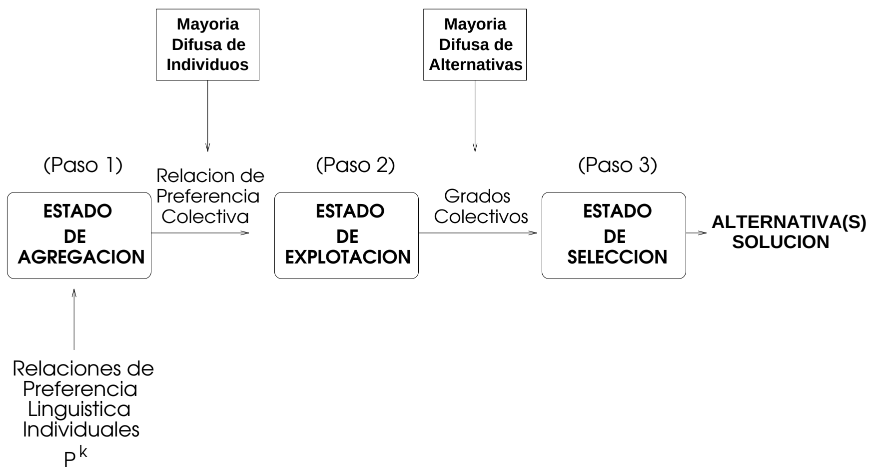

Figura 4.2. Orden de Aplicación de los Estados en Modelos Indirectos

En la siguiente sección, analizamos la naturaleza de los diferentes grados de selección individuales, colectivos y sociales que usamos.

4.2 Grados de Selección de Alternativas Lingüísticos

Un grado de selección de alternativas es una propiedad que caracteriza a una alternativa (bien respecto a las opiniones de un individuo o de un grupo) y permite establecer una clasificación dentro del conjunto total de alternativas. Las alternativas que cumplen esa propiedad con mayor intensidad son las que constituyen el conjunto de alternativas solución. En nuestros modelos de selección, la alternativas se pueden caracterizar en torno a dos propiedades:

- *Propiedad de Dominancia.* Indica el grado de dominancia de una alternativa sobre todas las demás.
- *Propiedad de No Dominancia.* Indica el grado de no dominancia del resto de alternativas sobre una dada.

Ambas propiedades indican el grado de adecuación o idoneidad que una alternativa presenta de cara a formar parte de la solución.

Para caracterizar ambas propiedades, presentamos dos grados de selección de alternativas lingüísticos guiados por cuantificadores, representando el cuantificador el concepto de mayoría de alternativas:

1. *Grado de dominancia lingüístico guiado por cuantificador.*
2. *Grado de no dominancia lingüístico guiado por cuantificador.*

Ambos grados se obtienen para cada alternativa a partir de una relación de preferencia lingüística (colectiva o individual). Dado que consideramos que trabajamos con conjuntos de alternativas homogéneos, se calculan mediante el operador de agregación de información lingüística no ponderada LOWA. En caso de que las alternativas estuvieran ponderadas, dependiendo de la naturaleza de las ponderaciones (lingüística o numérica), usaríamos o un operador de agregación de información lingüística ponderada WAO o bien el operador LOWA con algún tipo de función de transformación de información lingüística ponderada.

4.2.1 Grado de Dominancia Lingüístico Guiado por Cuantificador

Sea $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $(n \geq 2)$, un conjunto homogéneo finito de n alternativas, y sea P una relación de preferencia lingüística valorada en el conjunto de etiquetas S,

$$\mu_P : X\mathrm{x}X \rightarrow S,$$

donde $\mu_P(x_i, x_j) = p_{ij} \in S$ representa el grado de preferencia lingüística de la alternativa x_i sobre la x_j.

Definición 4.2.1 *Dada una alternativa $x_i \in X$, su grado de dominancia lingüístico guiado por cuantificador, GDQ_i, se define de acuerdo a la siguiente expresión:*

$$GDQ_i = \phi_{Q_a^1}(p_{ij}, j = 1, ..., n, j \neq i).$$

$\phi_{Q_a^1}$ es el operador LOWA guiado por el cuantificador, Q_a^1, representando el concepto de mayoría difusa de alternativas. En este sentido, el grado de dominancia lingüístico guiado por cuantificador, GDQ_i, de una alternativa, x_i, cuantifica, lingüísticamente, la dominancia que esta alternativa presenta sobre las Q_a^1 alternativas restantes.

Una vez que se tienen los grados de dominancia $GDQ(x_i)$ para todas las alternativas, se establece una clasificación en el conjunto de alternativas, X, a partir de la cual se calcula el conjunto de alternativa(s) solución, X^{GDQ}, según la siguiente expresión:

$$X^{GDQ} = \{x_i | x_i \in X, GDQ_i = sup_{x_j \in X} GDQ_j\}.$$

4.2.2 Grado de No Dominancia Lingüístico Guiado por Cuantificador

Este grado se basa en el concepto de alternativas no dominadas propuesto por Orlovski en [63], pero aplicado aquí en contexto lingüístico.

Definición 4.2.2 *Dada una alternativa $x_i \in X$, su grado de no dominancia lingüístico, $GND(x_i)$ (en el sentido de Orlovski), se obtiene conforme a esta expresión:*

$$GND_i = MIN_{x_j \in X,\ j \neq i}[NEG(p^s_{ji})].$$

Donde, p^s_{ji} representa el grado en el que la alternativa x_i es estrictamente dominada por la alternativa x_j, y se obtiene de acuerdo con Orlovski [63] como,

$$p^s_{ji} = s_0 \ si \ p_{ij} > p_{ji},$$

$$o \ p^s_{ji} = s_h \in S \ si \ p_{ji} \geq p_{ij} \ con \ p_{ji} = s_l, p_{ij} = s_t \ y \ l = t + h.$$

Así pues, el grado de no dominancia lingüístico, GND_i, de una alternativa, x_i, cuantifica, lingüísticamente, el mínimo grado de no dominancia que el resto de las alternativas presentan sobre esta alternativa. Esto significa que si $GND(x_i) = \alpha \in S$, entonces, la alternativa, x_i, es dominada por el resto en un grado no mayor que $1 - \alpha$.

Definición 4.2.3 *Dada una alternativa $x_i \in X$, su grado de no dominancia lingüístico guiado por cuantificador, $GNDQ_i$, se mide como:*

$$GNDQ_i = \phi_{Q^1_a}(NEG(p^s_{ji}), j = 1, ..., n, j \neq i).$$

En este sentido, el grado de no dominancia lingüístico, $GNDQ_i$, de una alternativa, x_i, cuantifica, lingüísticamente, el grado de no dominancia que las Q^1_a alternativas restantes presentan sobre esta alternativa.

Una vez que se tienen los grados de no dominancia $GNDQ_i$, para todas las alternativas, como antes, se establece una clasificación en el conjunto de alternativas X, a partir de la cual se calcula el conjunto de alternativa(s) solución, X^{GNDQ}, según la siguiente expresión:

$$X^{GNDQ} = \{x_i | x_i \in X, GNDQ_i = sup_{x_j \in X} GNDQ_j\}.$$

De igual modo se haría, caso de que usaramos los grados no cuantificados GND_i.

Nota. Cuando Q^1_a es el cuantificador "todos", representado en la figura 2.2), produce un vector de ponderación $W = [0, 0..., 1]$, y en este caso, el operador de LOWA, $\phi_{Q^1_a}$, equivale al operador "MIN". Por tanto, el grado de no dominancia lingüístico guiado por cuantificador, $GNDQ_i$, es una generalización del grado de no dominancia lingüístico, GND_i, en el sentido de Orlovski [63].

4.3 Taxonomía de Procesos de Selección de Alternativas

Teniendo en cuenta los dos grados de selección de alternativas estudiados, grados de dominancia y no dominancia, los dos esquemas de selección que se pueden seguir, esquemas directo e indirecto, y los dos contextos de TDG que consideramos en la presente memoria, homogéneo y heterogéneo, éstos son los distintos modelos de selección de alternativas que se pueden analizar, y que de hecho analizamos en las siguientes secciones:

1. Modelos de Selección Lingüísticos Directos
   (a) *En Contexto de TDG Homogéneo*
      i. Modelo de selección lingüístico directo homogéneo guiado por dominancia.
      ii. Modelo de selección lingüístico directo homogéneo guiado por no dominancia.
   (b) *En Contexto de TDG Heterogéneo*
      i. Modelo de selección lingüístico directo heterogéneo guiado por dominancia.
      ii. Modelo de selección lingüístico directo heterogéneo guiado por no dominancia.
2. Modelos de Selección Lingüísticos Indirectos
   (a) *En Contexto de TDG Homogéneo*
      i. Modelo de selección lingüístico indirecto homogéneo guiado por dominancia.
      ii. Modelo de selección lingüístico indirecto homogéneo guiado por no dominancia.
   (b) *En Contexto de TDG Heterogéneo*
      i. Modelo de selección lingüístico indirecto heterogéneo guiado por dominancia.
      ii. Modelo de selección lingüístico indirecto heterogéneo guiado por no dominancia.

Finalmente, como resultado de aplicar ambos grados juntos, en cada caso, podemos desarrollar dos modelos diferentes de combinar ambos grados:

3. Modelos de Selección Lingüísticos Combinados

   (a) *Modelo de Selección Conjuntivo*
   Por ejemplo, para los modelos del caso **1.a**, desarrollar un modelo de selección conjuntivo consiste en obtener el conjunto de alternativas solución como la intersección de los conjuntos solución obtenidos en los modelos **1.a.i** y **1.a.ii**.

   (b) *Modelo de Selección Secuencial*
   En este caso, desarrollar un modelo de selección secuencial consiste en obtener el conjunto de alternativas solución como la siguiente secuencia de pasos: primero se obtiene la solución de acuerdo a uno de ellos, y posteriormente sobre el conjunto solución encontrado, caso de estar formado por más de una alternativa, se aplica el modelo que queda, obteniéndose así la solución final.

Los modelos de selección desarrollados en contexto homogéneo, usan como marco de trabajo, el modelo lingüístico de TDG tipo A visto en el apartado 1.3.4. Este es un problema de TDG homogéneo que en síntesis se formula como sigue:

- hay un conjunto finito de alternativas $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ $(n \geq 2)$,
- sobre el que ha de decidir un conjunto finito de individuos $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$ $(m \geq 2)$;
- los individuos expresan sus preferencias en un dominio lingüístico, S, previamente establecido;
- cada individuo, $e_k \in E$, expresa sus opiniones sobre X mediante una relación de preferencia lingüística, $P^k \subset X \mathrm{x} X$, con función de pertenencia

$$\mu_{P^k} : X \mathrm{x} X \rightarrow S;$$

- sin pérdida de generalidad, suponemos que trabajamos con relaciones de preferencia lingüísticas recíprocas en el sentido visto en 1.3.3, es decir,

$$p_{ij}^k = NEG(p_{ji}^k), \text{ y } p_{ii}^k = \mathit{Indefinido}(-) \; \forall i, j;$$

Los modelos de selección desarrollados en contexto heterogéneo usan, como marco de trabajo, el mismo modelo lingüístico que se usó para desarrollar el modelo de consenso lingüístico guiado por medidas de consenso maximales del apartado 3.5. Concretamente, el modelo lingüístico de TDG tipo C visto en el apartado 1.3.4. Este es un problema de TDG heterogéneo que se desarrolla en un contexto lingüístico homogéneo (usando el mismo conjunto de etiquetas para expresar las opiniones y los grados de importancia), que brevemente se formula como sigue:

- hay un conjunto finito de alternativas $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ $(n \geq 2)$,
- sobre el que ha de decidir un conjunto finito de individuos $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$ $(m \geq 2)$;
- los individuos expresan sus preferencias en un dominio lingüístico, S, previamente establecido;
- cada individuo, $e_k \in E$, expresa sus opiniones sobre X mediante una relación de preferencia lingüística, $P^k \subset X\mathrm{x}X$, con función de pertenencia
$$\mu_{P^k} : X\mathrm{x}X \rightarrow S;$$
- sin pérdida de generalidad, y de cara a dar mayor libertad de expresión a los individuos, asumimos que trabajamos con relaciones de preferencia lingüísticas recíprocas débiles y completas, en el sentido visto en 1.3.3, es decir, tales que
  1. $p^k_{ii} = s_0 \ \forall x_i \in X$,
  2. si $p^k_{ij} \geq s_{T/2}$, entonces $p_{ji} \leq s_{T/2}$, y
  3. $p^k_{ij} \geq NEG(p^k_{ji}), \ \forall (x_i, x_j)$.
- Se considera asociado a cada individuo, $e_k \in E$, un grado de importancia, evaluado en el mismo conjunto de etiqueta que se usa para expresar las preferencias,
$$\mu_E : E \rightarrow S.$$
- Se considera que el conjunto de alternativas es homogéneo.

A continuación desarrollamos cada modelo, suponiendo que previamente hemos elegido cuantificadores difusos lingüísticos, Q^1_a y Q^1_e, adecuados para representar los conceptos de mayoría difusa de alternativas y de individuos, respectivamente.

4.4 Modelos de Selección Lingüísticos Directos

Estos modelos, como mencionamos en la sección 4.1, se desarrollan en base a dos tipos de grados de selección de alternativas, individuales y sociales, los cuales a su vez pueden representar la propiedad de dominancia o de no dominancia. Por tanto, en todos los modelos directos basados en dominancia (no dominancia) trabajamos con los siguientes grados de selección:

- *Grado de dominancia (no dominancia) lingüístico individual guiado por cuantificador.*
- *Grado de dominancia (no dominancia) lingüístico social guiado por cuantificador.*

Además, todos los modelos directos se desarrollan en tres estados como se vio en la sección 4.1, siguiendo el esquema dado en la figura 4.1. En lo que sigue, desarrollamos cada modelo de selección directo con sus propias peculiaridades, en función de los dos contextos, homogéneo y heterogéneo.

4.4.1 Modelos Directos Homogéneos

1. **Modelo de Selección Lingüístico Directo Homogéneo Guiado por Dominancia**

   Este modelo de selección se desarrolla en sus tres estados como se muestra en la figura 4.3. A continuación, cada uno de sus estados se explica más detalladamente.

   (a) Estado de Explotación.

   En este estado, para cada relación de preferencia lingüística individual, P^k, usando el operador de agregación de información lingüística no ponderada LOWA, $\phi_{Q_a^1}$, se obtiene el el grado de dominancia lingüístico individual guiado por cuantificador de cada alternativa, x_i, llamado $GDQ_i^{I,k}$, de acuerdo a la siguiente

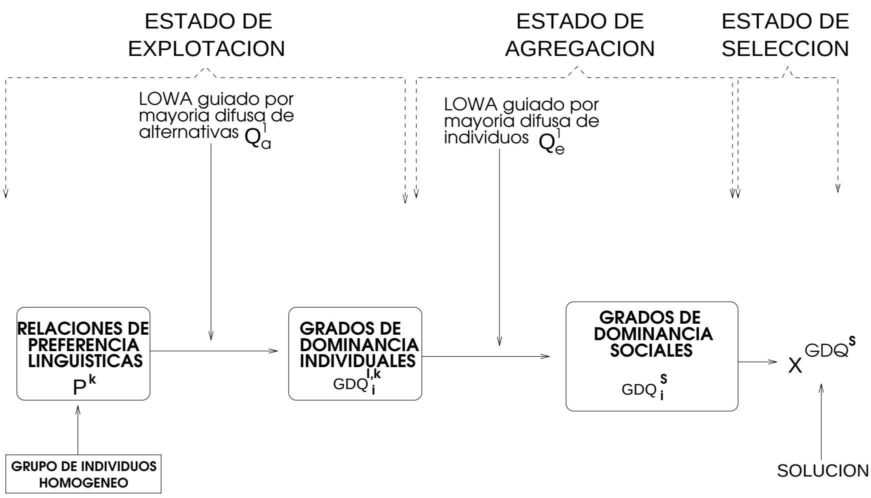

Figura 4.3. Modelo de Selección Lingüístico Directo Homogéneo Guiado por Dominancia

expresión:

$$GDQ_i^{I,k} = \phi_{Q_a^1}(p_{ij}^k, j = 1, \ldots, n, \ j \neq i)$$

con $k = 1, \ldots, m; \ i = 1, \ldots, n$.

(b) Estado de Agregación.

A partir de los grados individuales hallados en el estado anterior, usando el operador LOWA, $\phi_{Q_e^1}$, se obtiene el grado de dominancia lingüístico social guiado por cuantificador, GDQ_i^S, para cada alternativa, x_i, por

$$GDQ_i^S = \phi_{Q_e^1}(GDQ_i^{I,k} \ k = 1, \ldots, m),$$

con $i = 1, \ldots, n$.

(c) Estado de Selección.

Ahora, aplicando los grados sociales, GDQ_i^S, sobre el conjunto de alternativas, X, se obtiene el conjunto de alternativa(s) solución, X^{GDQ^S}, como:

$$X^{GDQ^S} = \{x_i \in X / GDQ_i^S = MAX_j\{GDQ_j^S\}\}.$$

Por tanto el conjunto de alternativas solución está formado por aquellas que presenta el máximo grado de dominancia social.

Ejemplo 4.4.1 Supongamos que usamos un conjunto de nueve etiquetas, S, como el de la figura 3.7 (usado en el ejemplo del apartado 3.4.1), para expresar las opiniones de un conjunto de cuatro individuos sobre un conjunto de cuatro alternativas. Las relaciones de preferencia lingüísticas de los cuatro individuos son las siguientes:

$$P^1 = \begin{bmatrix} - & B & T & N \\ A & - & BI & AI \\ N & AI & - & MB \\ T & BI & MA & - \end{bmatrix} P^2 = \begin{bmatrix} - & M & T & BI \\ M & - & BI & T \\ N & AI & - & MB \\ AI & N & MA & - \end{bmatrix}$$

$$P^3 = \begin{bmatrix} - & M & AI & N \\ M & - & N & AI \\ BI & T & - & MB \\ T & BI & MA & - \end{bmatrix} P^4 = \begin{bmatrix} - & M & T & BI \\ M & - & BI & T \\ N & AI & - & MB \\ AI & N & MA & - \end{bmatrix}.$$

Si tomamos como cuantificadores Q_e^1 y Q_a^1 el cuantificador "tantos como sea posible", con el par (0.5,1), el modelo de selección lingüístico directo homogéneo guiado por dominancia se desarrolla como sigue:

(a) Estado de Explotación

Los grados de dominancia lingüísticos individuales guiados por cuantificador de cada alternativa, $GDQ_i^{I,k}$, usando el operador LOWA, $\phi_{Q_a^1}$, con el vector de ponderación, $W = [0, 0.334, 0.666]$, son los siguientes:

i. Individuo e_1:

$$(GDQ_1^{I,1}, GDQ_2^{I,1}, GDQ_3^{I,1}, GDQ_4^{I,1}) = [BI, MB, BI, B].$$

ii. Individuo e_2:

$$(GDQ_1^{I,2}, GDQ_2^{I,2}, GDQ_3^{I,2}, GDQ_4^{I,2}) = [MB, MB, BI, MB].$$

iii. Individuo e_3:

$$(GDQ_1^{I,3}, GDQ_2^{I,3}, GDQ_3^{I,3}, GDQ_4^{I,3}) = [BI, BI, BI, B].$$

iv. Individuo e_4:

$$(GDQ_1^{I,4}, GDQ_2^{I,4}, GDQ_3^{I,4}, GDQ_4^{I,4}) = [MB, MB, BI, MB].$$

(b) Estado de Agregación

Entonces, usando el operador LOWA, $\phi_{Q^1_e}$, con el vector de ponderación, $W = [0, 0, 0.5, 0.5]$, se obtienen estos grados de dominancia lingüísticos sociales guiados por cuantificador de cada alternativa, GDQ^S_i:

$$(GDQ^S_1, GDQ^S_2, GDQ^S_3, GDQ^S_4 \;=\; [BI, MB, BI, MB]).$$

(c) Estado de Selección

Resultando este conjunto de alternativas solución:

$$X^{GDQ^S} = \{x_2, x_4\}.$$

□

2. **Modelo de Selección Lingüístico Directo Homogéneo Guiado por No Dominancia**

Este otro modelo de selección presenta el esquema de desarrollo de la figura 4.4, que es similar al del modelo anterior, pero ahora usando grados de no dominancia guiados por cuantificador (aunque también podría desarrollarse usando los grados de no dominancia en el sentido de Orlovski). A continuación, cada uno de sus estados se explica más detalladamente.

(a) Estado de Explotación.

Este estado se realiza en dos pasos:

i. Para cada relación de preferencia lingüística individual, P^k, hallamos su respectiva relación de preferencia estricta, $P^{s,k}$.

ii. Para cada relación de preferencia estricta, $P^{s,k}$, usando el operador de agregación de información lingüística no ponderada LOWA, $\phi_{Q^1_a}$, se obtiene el el grado de no dominancia lingüístico individual guiado por cuantificador de cada alternativa, x_i, llamado $GNDQ^{I,k}_i$, mediante

$$GNDQ^{I,k}_i = \phi_{Q^1_a}(NEG(p^{s,k}_{ji}), j = 1, \ldots, n,\; j \neq i),$$

con $k = 1, \ldots, m;\; i = 1, \ldots, n$.

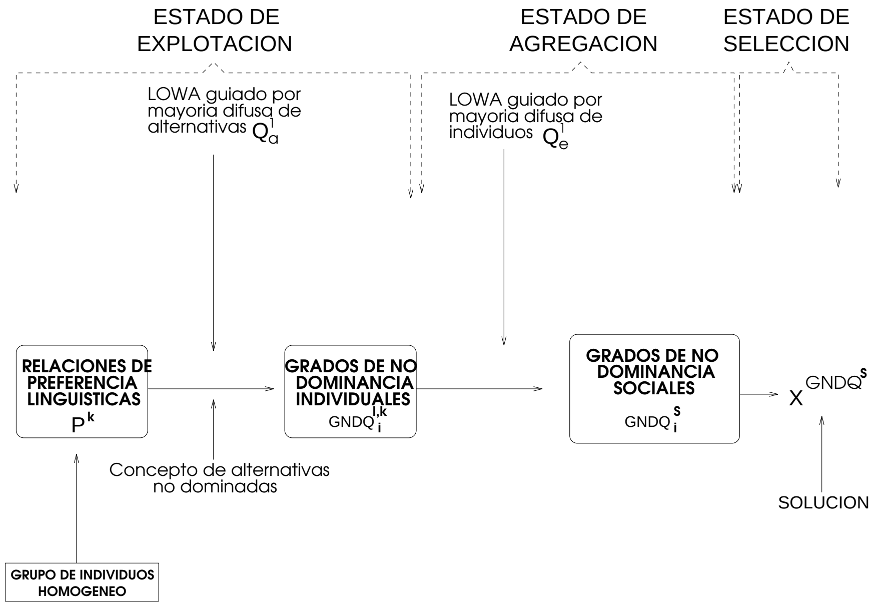

Figura 4.4. Modelo de Selección Lingüístico Directo Homogéneo Guiado por No Dominancia

(b) Estado de Agregación.

Usando los grados individuales hallados en el estado anterior y el operador LOWA, $\phi_{Q_e^1}$, se obtiene el grado de no dominancia lingüístico social guiado por cuantificador, $GNDQ_i^S$, para cada alternativa, x_i, de acuerdo a la siguiente expresión:

$$GNDQ_i^S = \phi_{Q_e^1}(GNDQ_i^{I,k},\ k = 1, \ldots, m),$$

con $i = 1, \ldots, n$..

(c) Estado de Selección.

A partir de los grados sociales hallados en el estado anterior, en este estado, se obtiene el conjunto de alternativas solución, X^{GNDQ^S}, como:

$$X^{GNDQ^S} = \{x_i \in X / GNDQ_i^S = MAX_j\{GNDQ_j^S\}\},$$

estando formado por aquellas alternativas con máximo grado de no dominancia social.

Ejemplo 4.4.2 Asumiendo el mismo contexto dado en el ejemplo del apartado anterior 4.4.1, el modelo de selección lingüístico directo homogéneo guiado por no dominancia se desarrolla como sigue:

(a) Estado de Explotación

Primero obtenemos las relaciones de preferencia estrictas, $P^{s,k}$:

$$P^{s,1} = \begin{bmatrix} - & N & T & N \\ MB & - & N & MA \\ N & MA & - & N \\ T & N & M & - \end{bmatrix} P^{s,2} = \begin{bmatrix} - & N & T & N \\ N & - & N & T \\ N & MA & - & N \\ MA & N & M & - \end{bmatrix}$$

$$P^{s,3} = \begin{bmatrix} - & N & MA & N \\ N & - & N & MA \\ N & T & - & N \\ T & MA & M & - \end{bmatrix} P^{s,4} = \begin{bmatrix} - & N & T & N \\ N & - & N & T \\ N & MA & - & N \\ MA & N & M & - \end{bmatrix}$$

Usamos grados de no dominancia en el sentido de Orlovski. Entonces, los grados de no dominancia lingüísticos individuales de cada alternativa, $GND_i^{I,k}$, son los siguientes:

i. Individuo e_1:

$$(GND_1^{I,1}, GND_2^{I,1}, GND_3^{I,1}, GND_4^{I,1}) \;=\; [N, MB, N, MB].$$

ii. Individuo e_2:

$$(GND_1^{I,2}, GND_2^{I,2}, GND_3^{I,2}, GND_4^{I,2}) \;=\; [MB, MB, N, N].$$

iii. Individuo e_3:

$$(GND_1^{I,3}, GND_2^{I,3}, GND_3^{I,3}, GND_4^{I,3}) \;=\; [N, N, MB, MB].$$

iv. Individuo e_4:

$$(GND_1^{I,4}, GND_2^{I,4}, GND_3^{I,4}, GND_4^{I,4}) \;=\; [MB, MB, N, N].$$

(b) Estado de Agregación

Por tanto, usando el operador LOWA, $\phi_{Q_e^1}$, con el vector de ponderación, $W = [0, 0, 0.5, 0.5]$, tenemos estos grados de no dominancia lingüísticos sociales, GND_i^S:

$$(GND_1^S, GND_2^S, GND_3^S, GND_4^S \;=\; [N, BI, N, N]).$$

(c) Estado de Selección

En este caso, el conjunto de alternativas solución que se obtiene está constituído por una sola alternativa:

$$X^{GND^S} = \{x_2\}.$$

□

4.4.2 Modelos Directos Heterogéneos

1. **Modelo de Selección Lingüístico Directo Heterogéneo Guiado por Dominancia**

   Este modelo de selección se desarrolla en tres estados como se muestra en la figura 4.5. A continuación se explica más detalladamente.

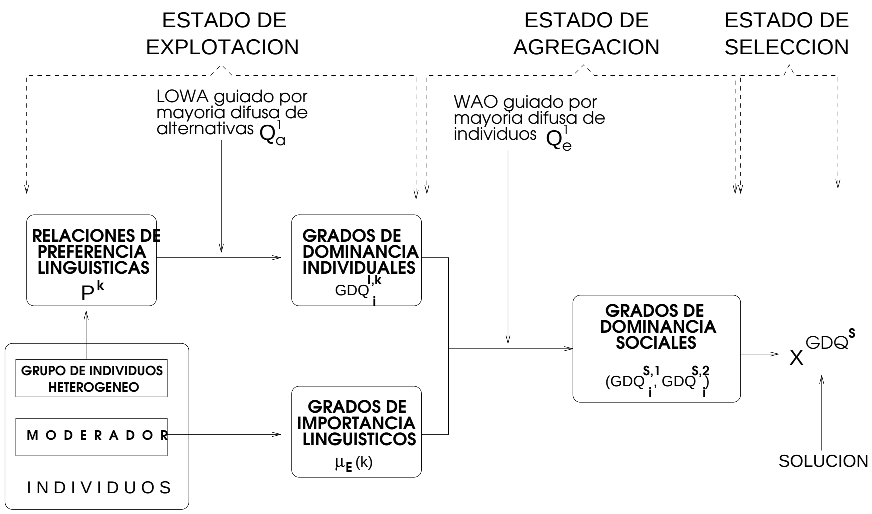

Figura 4.5. Modelo de Selección Lingüístico Directo Heterogéneo Guiado por Dominancia

(a) Estado de Explotación.

En este estado, para cada relación de preferencia lingüística individual, P^k, usando el operador LOWA, $\phi_{Q_a^1}$, se halla el grado de dominancia lingüístico individual guiado por cuantificador de cada alternativa, x_i, llamado $GDQ_i^{I,k}$, de acuerdo a la siguiente expresión:

$$GDQ_i^{I,k} = \phi_{Q_a^1}(p_{ij}^k, j = 1, \ldots, n,\ j \neq i)$$

con $k = 1, \ldots, m;\ i = 1, \ldots, n$.

(b) Estado de Agregación.

Por tanto a partir de los grados individuales y usando un operador de agregación de información lingüística ponderada WAO (cualquiera de aquellos presentados en el capítulo segundo) guiado por un cuantificador, Q_e^1, (que notamos $WAO_{Q_e^1}$), se averigua el grado de dominancia lingüístico social guiado por cuantificador, GDQ_i^S, para cada alternativa, x_i. Este grado se define por dos componentes, es decir, $GDQ_i^S = (GDQ_i^{S,1}, GDQ_i^{S,2})$; la primera , contiene el valor real del grado de dominancia social, y la segunda, contiene el grado de importancia del mismo. Por tanto,

$$(GDQ_i^{S,1}, GDQ_i^{S,2}) = WAO_{Q_e^1}[(GDQ_i^{I,k}, \mu_E(k))\ k = 1, \ldots, m)],$$

con $i = 1, \ldots, n$. Es obvio que la segunda componente es igual para todas las alternativas, es decir,

$$GDQ_1^{S,2} \ = \ GDQ_2^{S,2} \ = \ldots = \ GDQ_n^{S,2},$$

por lo que dicha componente no sirve para discernir entre las alternativas. Su valor puede interpretarse como un grado de credibilidad de la solución que se obtenga.

(c) Estado de Selección.

De nuevo, aplicando los grados sociales,$GDQ_i^{S,1}$, sobre X se selecciona el conjunto de alternativa(s) solución, X^{GDQ^S}, como:

$$X^{GDQ^S} = \{x_i \in X / GDQ_i^{S,1} = MAX_j\{GDQ_j^{S,1}\}\}.$$

Por tanto el conjunto de alternativas solución está formado por aquellas que presenta el máximo grado de dominancia social.

Ejemplo 4.4.3 Supongamos que usamos el mismo conjunto de nueve etiquetas, S, de los ejemplos de los apartados 4.4.1 y 4.4.2, para expresar las opiniones y los grados de importancia de un conjunto heterogéneo de cuatro individuos, que analizan un conjunto de cuatro alternativas. Las relaciones de preferencia lingüísticas de los cuatro individuos son las siguientes:

$$P^1 = \begin{bmatrix} - & B & T & N \\ A & - & BI & AI \\ N & AI & - & MB \\ T & BI & MA & - \end{bmatrix} \quad P^2 = \begin{bmatrix} - & M & T & BI \\ M & - & BI & T \\ N & AI & - & MB \\ AI & N & MA & - \end{bmatrix}$$

$$P^3 = \begin{bmatrix} - & M & AI & N \\ M & - & N & AI \\ BI & T & - & MB \\ T & BI & MA & - \end{bmatrix} \quad P^4 = \begin{bmatrix} - & M & T & BI \\ M & - & BI & T \\ N & AI & - & MB \\ AI & N & MA & - \end{bmatrix},$$

y sus respectivos grados de importancia,

$$\mu_E(1) = AI \quad \mu_E(2) = T \quad \mu_E(3) = B \quad \mu_E(4) = BI.$$

Si tomamos como cuantificadores Q_e^1 y Q_a^1 el cuantificador "al menos la mitad", con el par (0,0.5), el modelo de selección lingüístico directo heterogéneo guiado por dominancia se desarrolla como sigue:

(a) Estado de Explotación

Entonces, los grados de dominancia lingüísticos individuales guiados por cuantificador de cada alternativa, $GDQ_i^{I,k}$, usando el operador LOWA, $\phi_{Q_a^1}$, con el vector de ponderación, $W = [0.666, 0.334, 0]$, son los siguientes:

i. Individuo e_1:

$$(GDQ_1^{I,1}, GDQ_2^{I,1}, GDQ_3^{I,1}, GDQ_4^{I,1}) = [B, AI, B, AI].$$

ii. Individuo e_2:

$$(GDQ_1^{I,2}, GDQ_2^{I,2}, GDQ_3^{I,2}, GDQ_4^{I,2}) = [A, MA, M, AI].$$

iii. Individuo e_3:

$$(GDQ_1^{I,3}, GDQ_2^{I,3}, GDQ_3^{I,3}, GDQ_4^{I,3}) \;=\; [T, A, B, T].$$

iv. Individuo e_4:

$$(GDQ_1^{I,4}, GDQ_2^{I,4}, GDQ_3^{I,4}, GDQ_4^{I,4}) \;=\; [M, MA, A, T].$$

(b) Estado de Agregación

Los grados de dominancia lingüísticos sociales guiados por cuantificador de cada alternativa, $GDQ_i^{S,1}$, usando como operador de agregación de información lingüística ponderada, $WAO_{Q_e^1}$, el operador disyuntivo, $DLP_{Q_e^1}$, son éstos:

$$(GDQ_1^{S,1}, GDQ_2^{S,1}, GDQ_3^{S,1}, GDQ_4^{S,1} \;=\; [A, AI, M, AI]).$$

La componente de importancia de estos grados, $GDQ_i^{S,2}$, se obtiene usando el operador LOWA, $\phi_{Q_e^1}$, (componente del operador $DLP_{Q_e^1}$ para agregar grados de importancia) con el vector de ponderación, $W = [0.5, 0.5, 0, 0, 0.5, 0.5]$, resultando:

$$GDQ_i^{S,2} = VH.$$

Como vemos el grado de credibilidad de la solución que se obtiene es bastante alto.

(c) Estado de Selección

El conjunto de alternativas solución que se obtiene es el siguiente:

$$X^{GDQ^S} = \{x_2, x_4\}.$$

$\square$

2. **Modelo de Selección Lingüístico Directo Heterogéneo Guiado por No Dominancia**

Este modelo de selección se desarrolla en tres estados como se muestra en la figura 4.6, de forma similar al anterior, pero ahora usando grados de no dominancia guiados por cuantificador. A continuación, se explica más detalladamente cada uno de sus estados.

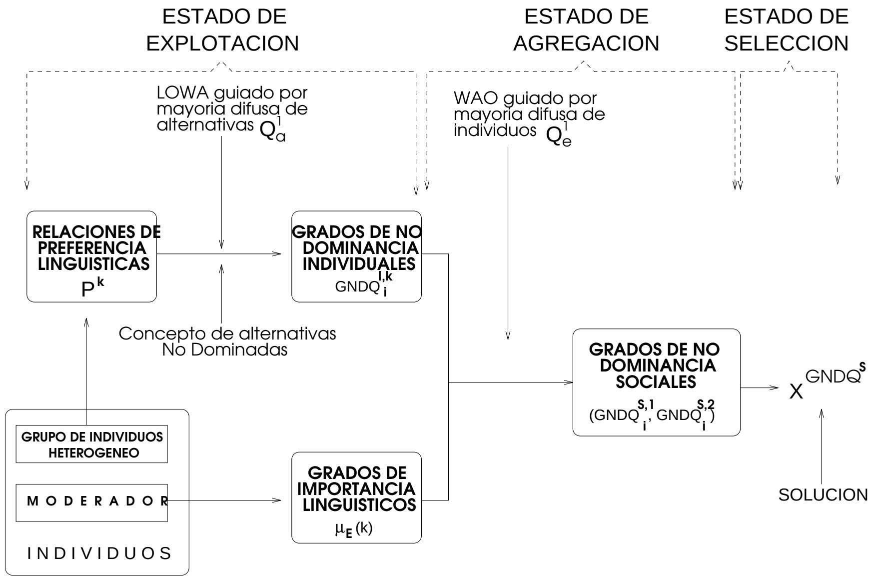

Figura 4.6. Modelo de Selección Lingüístico Directo Heterogéneo Guiado por No Dominancia

(a) Estado de Explotación.

Se realiza en dos pasos:

i. Para cada relación de preferencia lingüística individual, P^k, hallamos su respectiva relación de preferencia estricta, $P^{s,k}$.

ii. Para cada relación de preferencia estricta, $P^{s,k}$, usando el operador de agregación de información lingüística no ponderada LOWA, $\phi_{Q^1_a}$, se obtiene el el grado de no dominancia lingüístico individual guiado por cuantificador de cada alternativa, x_i, llamado $GNDQ^{I,k}_i$, de acuerdo con:

$$GNDQ^{I,k}_i = \phi_{Q^1_a}(NEG(p^{s,k}_{ji}), j = 1, \ldots, n,\ j \neq i),$$

con $k = 1, \ldots, m;\ i = 1, \ldots, n$.

(b) Estado de Agregación.

A partir de los grados individuales mediante un operador de agregación de información lingüística ponderada $WAO_{Q^1_e}$, guiado por un cuantificador, Q^1_e, se define el grado de no dominancia lingüístico social guiado por cuantificador, $GNDQ^S_i$, para cada alternativa, x_i. Este grado, como en el modelo anterior, está formado por dos componentes, es decir, $GNDQ^S_i = (GNDQ^{S,1}_i, GNDQ^{S,2}_i)$, y se obtiene como:

$$(GNDQ_i^{S,1}, GNDQ_i^{S,2}) = WAO_{Q_e^1}[(GNDQ_i^{I,k}, \mu_E(k))\ k = 1, \ldots, m)]$$

con $i = 1, \ldots, n$..

(c) Estado de Selección.

Aquí, a partir de los grados sociales hallados en el estado anterior, se elige el conjunto de alternativas solución, X^{GNDQ^S}, conforme a

$$X^{GNDQ^S} = \{x_i \in X / GNDQ_i^{S,1} = MAX_j\{GNDQ_j^{S,1}\}\},$$

y por tanto, el conjunto de alternativas solución está formado por aquellas con máximo grado de no dominancia social.

Ejemplo 4.4.4 Supuesto el mismo contexto dado en el ejemplo del apartado anterior 4.4.3, el modelo de selección lingüístico directo heterogéneo guiado por no dominancia se desarrolla como sigue:

(a) Estado de Explotación

Primero obtenemos las relaciones de preferencia estrictas, $P^{s,k}$:

$$P^{s,1} = \begin{bmatrix} - & N & M & N \\ MB & - & B & B \\ N & N & - & M \\ A & N & N & - \end{bmatrix} P^{s,2} = \begin{bmatrix} - & MB & N & N \\ N & - & B & N \\ N & N & - & N \\ M & BI & A & - \end{bmatrix}$$

$$P^{s,3} = \begin{bmatrix} - & B & H & N \\ N & - & BI & N \\ N & N & - & N \\ T & M & M & - \end{bmatrix} P^{s,4} = \begin{bmatrix} - & N & BI & N \\ M & - & N & MB \\ N & MB & - & N \\ A & N & A & - \end{bmatrix}.$$

Entonces, los grados de no dominancia lingüísticos individuales guiados por cuantificador de cada alternativa, $GNDQ_i^{I,k}$, usando el operador LOWA, $\phi_{Q_a^1}$, con el vector de ponderación, $W = [0.666, 0.334, 0]$, son los siguientes:

i. Individuo e_1:

$$(GNDQ_1^{I,1}, GNDQ_2^{I,1}, GNDQ_3^{I,1}, GNDQ_4^{I,1}) = [B, T, M, M].$$

ii. Individuo e_2:

$$(GNDQ_1^{I,2}, GNDQ_2^{I,2}, GNDQ_3^{I,2}, GNDQ_4^{I,2}) = [M, MA, B, T].$$

iii. Individuo e_3:

$$(GNDQ_1^{I,3}, GNDQ_2^{I,3}, GNDQ_3^{I,3}, GNDQ_4^{I,3}) = [N, M, BI, T].$$

iv. Individuo e_4:

$$(GNDQ_1^{I,4}, GNDQ_2^{I,4}, GNDQ_3^{I,4}, GNDQ_4^{I,4}) = [M, MA, B, MA].$$

(b) Estado de Agregación

Los grados de no dominancia lingüísticos sociales guiados por cuantificador de cada alternativa, $GNDQ_i^{S,1}$, usando el mismo operador disyuntivo $DLP_{Q_e^1}$, son los siguientes:

$$(GNDQ_1^{S,1}, GNDQ_2^{S,1}, GNDQ_3^{S,1}, GNDQ_4^{S,1} = [M, AI, M, T]).$$

La componente de importancia se mantiene como antes: $GNDQ_i^{S,2} = VH$.

(c) Estado de Selección

Finalmente, el conjunto de alternativas solución está compuesto por una alternativa:

$$X^{GNDQ^S} = \{x_4\}.$$

□

4.5 Modelos de Selección Lingüísticos Indirectos

Estos modelos, como mencionamos en la sección 4.1, se desarrollan en base al grado de selección de alternativas colectivo, el cual, a su vez, puede representar la propiedad de dominancia o de no dominancia. Por tanto, en todos los modelos indirectos basados en dominancia (no dominancia) trabajamos con el grado de dominancia (no dominancia) lingüístico colectivo guiado por cuantificador. Además, todos los modelos indirectos se desarrollan en tres estados como se vio en la sección 4.1, siguiendo el esquema dado en la figura 4.2. Como antes, a continuación desarrollamos cada modelo de selección indirecto con sus propias especificaciones, distinguiendo entre dos contextos, homogéneo y heterogéneo.

4.5.1 Modelos Indirectos Homogéneos

1. **Modelo de Selección Lingüístico Indirecto Homogéneo Guiado por Dominancia**

   Se desarrolla en tres estados como se muestra en la figura 4.7. A continuación, cada uno de sus estados se explica más detalladamente.

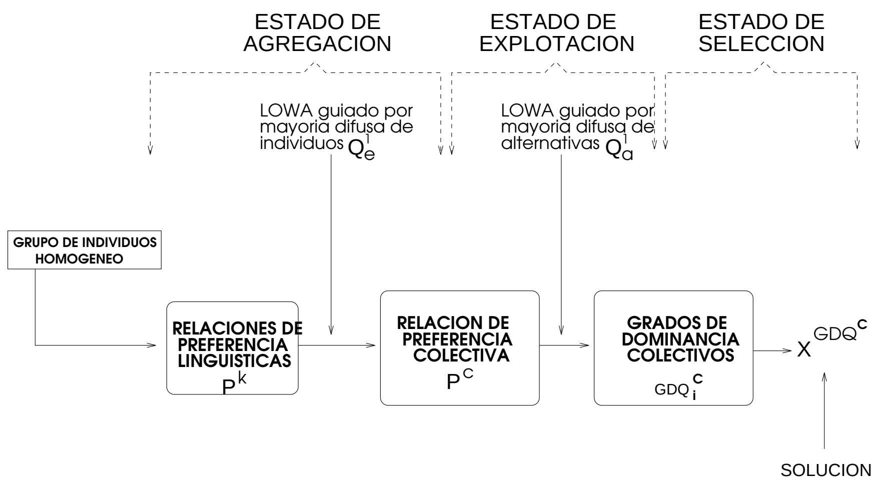

Figura 4.7. Modelo de Selección Lingüístico Indirecto Homogéneo Guiado por Dominancia

   (a) Estado de Agregación.

   Considerando las relaciones de preferencia lingüística, $\{P^1, \ldots, P^m\}$, y usando el operador LOWA, $\phi_{Q_e^1}$, se obtiene la relación de preferencia colectiva, P^C,

$$P^C \;=\; \phi_{Q_e^1}(P^1, \ldots, P^m).$$

(b) Estado de Explotación.

En base a la relación P^C y mediante el operador LOWA, $\phi_{Q_a^1}$, se obtiene el grado de dominancia lingüístico colectivo guiado por cuantificador de cada alternativa, x_i, llamado GDQ_i^C, de acuerdo a la siguiente expresión:

$$GDQ_i^C = \phi_{Q_a^1}(p_{ij}^k, j = 1, \ldots, n, \ j \neq i)$$

con $k = 1, \ldots, m$; $i = 1, \ldots, n$.

(c) Estado de Selección.

El conjunto de alternativa(s) solución, X^{GDQ^C}, se halla como:

$$X^{GDQ^C} = \{x_i \in X / GDQ_i^C = MAX_j\{GDQ_j^C\}\}.$$

Por tanto el conjunto de alternativas solución está formado por aquellas que presenta el máximo grado de dominancia colectivo.

Ejemplo 4.5.1 Asumiendo el mismo contexto dado en el ejemplo del apartado anterior 4.4.1, el modelo de selección lingüístico indirecto homogéneo guiado por dominancia se desarrolla como sigue:

(a) Estado de Agregación

La relación de preferencia colectiva, P^C, usando el operador LOWA, $\phi_{Q_e^1}$, con el vector de ponderación, $W = [0, 0, 0.5, 0.5]$, es la siguiente:

$$P^C = \begin{bmatrix} - & M & T & N \\ M & - & BI & AI \\ N & AI & - & MB \\ AI & N & MA & - \end{bmatrix}.$$

(b) Estado de Explotación

Los grados de dominancia lingüísticos colectivos guiados por cuantificador de cada alternativa, GDQ_i^C, usando el operador LOWA, $\phi_{Q_a^1}$, con el vector de ponderación, $W = [0, 0.334, 0.666]$, son:

$$(GDQ_1^C, GDQ_2^C, GDQ_3^C, GDQ_4^C \ = \ [BI, MB, BI, MB]).$$

(c) Estado de Selección

Entonces el conjunto de alternativa(s) solución que se obtiene es:

$$X^{GDQ^C} = \{x_2, x_4\}.$$

$\square$

2. **Modelo de Selección Lingüístico Indirecto Homogéneo Guiado por No Dominancia**

Se desarrolla en tres estados como se muestra en la figura 4.8. Este es similar al del modelo anterior, pero ahora usando grados de no dominancia guiados por cuantificador. A continuación, cada uno de sus estados se explica más detalladamente.

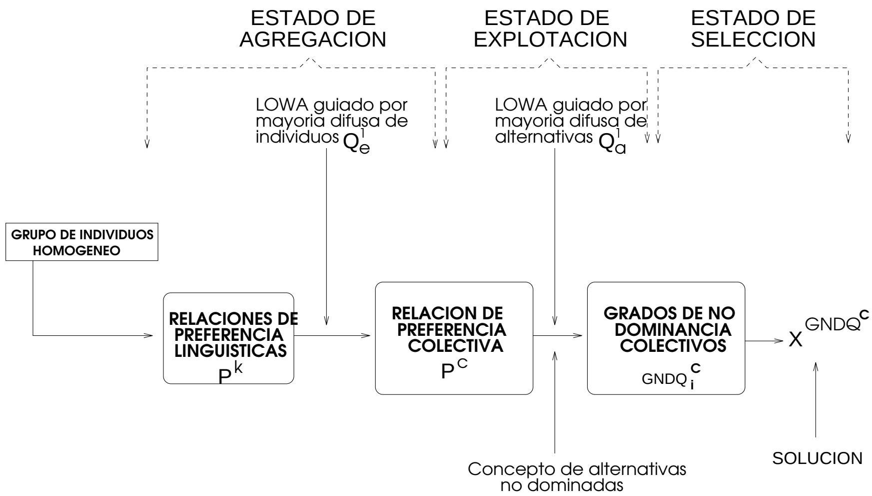

Figura 4.8. Modelo de Selección Lingüístico Indirecto Homogéneo Guiado por No Dominancia

(a) Estado de Agregación.

Usando el conjunto de las relaciones de preferencia lingüística, $\{P^1, \ldots, P^m\}$, y el operador LOWA, $\phi_{Q^1_e}$, se halla la relación de preferencia colectiva ponderada lingüísticamente, P^C, conforme a:

$$P^C = \phi_{Q^1_e}(P^1, \ldots, P^m).$$

(b) Estado de Explotación.

Se realiza en dos pasos:

i. Hallamos la relación de preferencia estricta, $P^{C,s}$, asociada a la relación de preferencia colectiva, P^C.

ii. Con $P^{C,s}$ y usando el operador LOWA, $\phi_{Q_a^1}$, se averigua el grado de no dominancia lingüístico colectivo guiado por cuantificador de cada alternativa, x_i, llamado $GNDQ_i^C$, como:

$$GNDQ_i^C = \phi_{Q_a^1}(NEG(p_{ji}^{C,s}), j = 1, \ldots, n,\ j \neq i)$$

con $k = 1, \ldots, m;\ i = 1, \ldots, n$.

(c) Estado de Selección.

Ahora, a partir de los grados colectivos hallados en el estado anterior, se obtiene el conjunto de alternativas solución, X^{GNDQ^C}, conforme a:

$$X^{GNDQ^C} = \{x_i \in X / GNDQ_i^C = MAX_j\{GNDQ_j^C\}\}.$$

Por tanto el conjunto de alternativas solución está formado por aquellas que presenta el máximo grado de no dominancia colectivo.

Ejemplo 4.5.2 Supuesto el mismo contexto dado en el ejemplo del apartado anterior 4.5.1, el modelo de selección lingüístico indirecto homogéneo guiado por no dominancia se desarrolla como sigue:

(a) Estado de Agregación

La relación de preferencia colectiva, P^C, es la misma que encontramos en el ejemplo anterior 4.5.1,

$$P^C = \begin{bmatrix} - & M & T & N \\ M & - & BI & AI \\ N & AI & - & MB \\ AI & N & MA & - \end{bmatrix}.$$

(b) Estado de Explotación

La relación de preferencia estricta asociada a P^C es:

$$P^{C,s} = \begin{bmatrix} - & N & T & N \\ N & - & N & AI \\ N & MA & - & N \\ AI & N & M & - \end{bmatrix}.$$

Usaremos, como en 4.4.2, grados de no dominancia en el sentido de Orlovski. Entonces, los grados de no dominancia lingüísticos colectivos de cada alternativa, GND_i^C, son los siguientes:

$$(GND_1^C, GND_2^C, GND_3^C, GND_4^C \;=\; [BI, MB, N, BI]).$$

(c) Estado de Selección

Y por tanto, obtenemos el siguiente conjunto de alternativas solución:

$$X^{GND^C} = \{x_2\}.$$

$\square$

4.5.2 Modelos Indirectos Heterogéneos

1. **Modelo de Selección Lingüístico Indirecto Heterogéneo Guiado por Dominancia**

   Este modelo de selección se desarrolla en tres estados como se muestra en la figura 4.9. A continuación, cada uno de sus estados se explica más detalladamente.

   (a) Estado de Agregación.

   A partir de las relaciones de preferencia lingüísticas, ponderadas lingüísticamente, $\{(P^1, \mu_E(1)), \ldots, (P^m, \mu_E(m))\}$, usando un operador de agregación de información lingüística ponderada, $WAO_{Q_e^1}$, se obtiene una relación de preferencia colectiva ponderada lingüísticamente, (P^C, μ_E^C), como:

$$(P^C, \mu_E^C) \;=\; WAO_{Q_e^1}[(P^1, \mu_E(1)), \ldots, (P^m, \mu_E(m))],$$

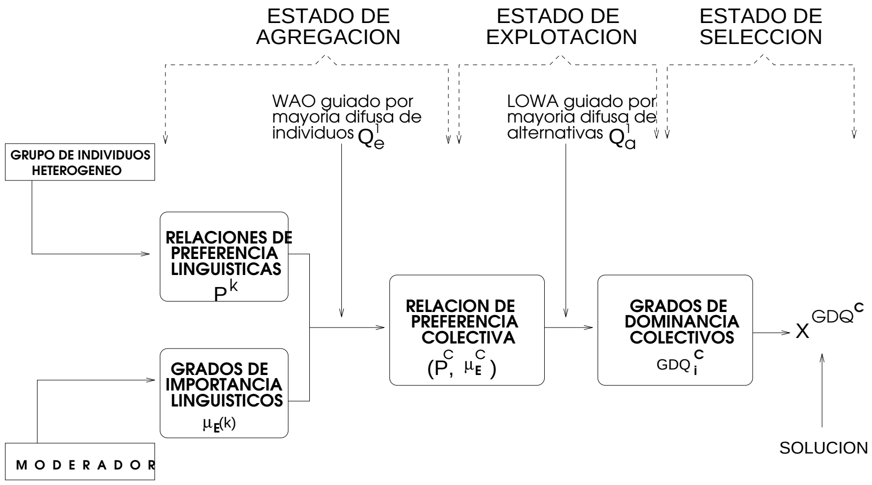

Figura 4.9. Modelo de Selección Lingüístico Indirecto Heterogéneo Guiado por Dominancia

donde μ_E^C expresa el grado de importancia de la opinión que refleja la relación de preferencia colectiva, y no se usa para discernir entre las alternativas.

(b) Estado de Explotación.

Operando sobre P^C y usando el operador LOWA, $\phi_{Q_a^1}$, se obtiene el grado de dominancia lingüístico colectivo guiado por cuantificador de cada alternativa, x_i, llamado GDQ_i^C, conforme a:

$$GDQ_i^C = \phi_{Q_a^1}(p_{ij}^k, j = 1, \ldots, n, \ j \neq i)$$

con $k = 1, \ldots, m; \ i = 1, \ldots, n$.

(c) Estado de Selección.

Aquí, aplicando sobre X los grados colectivos hallados en el estado anterior, se obtiene el conjunto de alternativa(s) solución, X^{GDQ^C}:

$$X^{GDQ^C} = \{x_i \in X / GDQ_i^C = MAX_j\{GDQ_j^C\}\}.$$

Por tanto el conjunto de alternativas solución está formado por aquellas que presenta el máximo grado de dominancia colectivo.

Ejemplo 4.5.3 En base al mismo contexto dado en el ejemplo del apartado anterior 4.4.3, el modelo de selección lingüístico indirecto heterogéneo guiado por dominancia se desarrolla como sigue:

(a) Estado de Agregación

La relación de preferencia colectiva ponderada lingüísticamente, (P^C, μ_E^C), usando el operador disyuntivo $DLP_{Q_e^1}$ guiado por el cuantificador, Q_e^1, con el vector de ponderación, $W = [0.5, 0.5, 0, 0]$, es la siguiente:

$$(P^C, \mu_E^C) = \left[\begin{array}{llll} - & MA & AI & B \\ MA & - & MA & MA \\ M & A & - & MB \\ T & MA & T & - \end{array}\right], T).$$

(b) Estado de Explotación

Los grados de dominancia lingüísticos colectivos guiados por cuantificador de cada alternativa, GDQ_i^C, usando el operador LOWA, $\phi_{Q_a^1}$, con el vector de ponderación, $W = [0.666, 0.334, 0]$, son:

$$(GDQ_1^C, GDQ_2^C, GDQ_3^C, GDQ_4^C \;=\; [AI, MA, A, T]).$$

(c) Estado de Selección

Y por tanto, el conjunto de alternativas solución que se obtiene es:

$$X^{GDQ^C} = \{x_4\}.$$

□

2. **Modelo de Selección Lingüístico Indirecto Heterogéneo Guiado por No Dominancia**

Se desarrolla en tres estados como se muestra en la figura 4.10, y es similar al modelo anterior, pero ahora usando grados de no dominancia guiados por cuantificador. A continuación, cada uno de sus estados se explica más detalladamente.

(a) Estado de Agregación.

Como antes, a partir de las relaciones de preferencia lingüística, ponderadas lingüísticamente, $\{(P^1, \mu_E(1)), \ldots, (P^m, \mu_E(m))\}$, usando un operador $WAO_{Q_e^1}$, se halla la relación de preferencia colectiva ponderada lingüísticamente, (P^C, μ_E^C), como:

$$(P^C, \mu_E^C) \;=\; WAO_{Q_e^1}[(P^1, \mu_E(1)), \ldots, (P^m, \mu_E(m))].$$

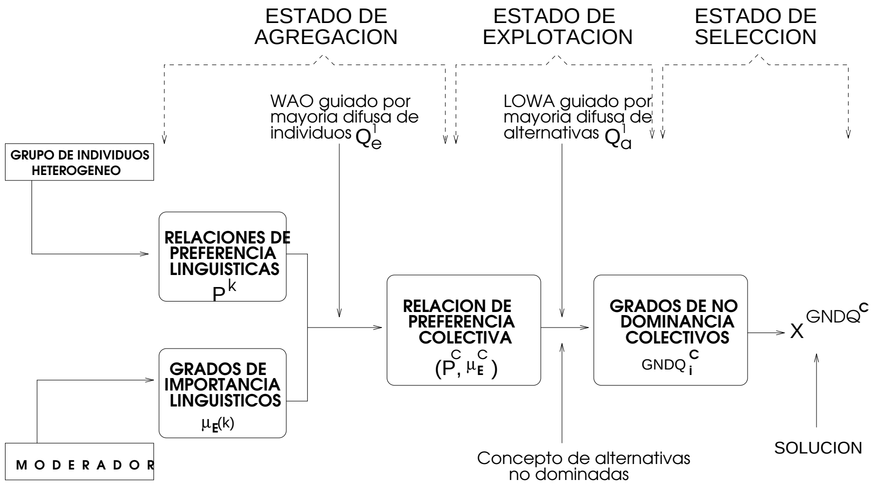

Figura 4.10. Modelo de Selección Lingüístico Indirecto Heterogéneo Guiado por No Dominancia

(b) Estado de Explotación.

Se realiza en dos pasos:

i. Hallamos la relación de preferencia estricta, $P^{C,s}$.

ii. A partir $P^{C,s}$, mediante el operador LOWA, $\phi_{Q_a^1}$, se determina el grado de no dominancia lingüístico colectivo guiado por cuantificador de cada alternativa, x_i, llamado $GNDQ_i^C$, de acuerdo con:

$$GNDQ_i^C = \phi_{Q_a^1}(NEG(p_{ji}^{C,s}), j = 1, \ldots, n,\ j \neq i)$$

con $k = 1, \ldots, m;\ i = 1, \ldots, n$.

(c) Estado de Selección.

Aquí, a partir de los grados colectivos hallados en el estado anterior, se obtiene el conjunto de alternativas solución, X^{GNDQ^C}, conforme a esta expresión:

$$X^{GNDQ^C} = \{x_i \in X / GNDQ_i^C = MAX_j\{GNDQ_j^C\}\}.$$

Por tanto el conjunto de alternativas solución está formado por aquellas que presenta el máximo grado de no dominancia colectivo.

Ejemplo 4.5.4 Asumiendo el mismo contexto dado en el ejemplo del apartado anterior 4.5.3, el modelo de selección lingüístico indirecto heterogéneo guiado por no dominancia se desarrolla como sigue:

(a) Estado de Agregación

La relación de preferencia colectiva ponderada lingüísticamente, (P^C, μ_E^C), es la misma que la del ejemplo del apartado 4.5.3.

$$(P^C, \mu_E^C) = \left(\begin{bmatrix} - & MA & AI & B \\ MA & - & MA & MA \\ M & A & - & MB \\ T & MA & T & - \end{bmatrix}, T \right).$$

(b) Estado de Explotación

La relación de preferencia estricta asociada a P^C es:

$$P^{C,s} = \begin{bmatrix} - & N & B & N \\ N & - & BI & N \\ N & N & - & N \\ A & N & MA & - \end{bmatrix}.$$

Entonces, los grados de no dominancia lingüísticos colectivos guiados por cuantificador de cada alternativa, $GNDQ_i^C$, usando el operador LOWA, $\phi_{Q_a^1}$, con el vector de ponderación, $W = [0.666, 0.334, 0]$, son los siguientes:

$$(GNDQ_1^C, GNDQ_2^C, GNDQ_3^C, GNDQ_4^C = [B, T, MB, T]).$$

(c) Estado de Selección

Por tanto, el conjunto de alternativas solución que se obtiene es:

$$X^{GNDQ^C} = \{x_2, x_4\}.$$

□

4.6 Modelos de Selección Lingüísticos Combinados

Independientemente de que el contexto de trabajo sea homogéneo o heterogéneo, cuando el conjunto de alternativas solución que se obtiene en un modelo de selección directo guiado por el grado de dominancia (no dominancia) está formado por varias alternativas, entonces, puede ser conveniente combinarlo con el modelo de selección directo guiado por el grado de no dominancia (dominancia), con objeto de obtener una solución más específica. De esta forma, desarrollamos modelos de selección de alternativas guiados por ambos tipos de grados, dominancia y no dominancia. Como hemos anticipado, consideramos dos formas de combinar los grados:

- *Modelo de selección conjuntivo.*
- *Modelo de selección secuencial.*

Igualmente podemos hacer cuando trabajamos con modelos indirectos. A continuación, analizamos cada uno de los modelos combinados tomando como punto de referencia los modelos de selección directos desarrollados en problemas de TDG heterogéneos.

4.6.1 Modelo de Selección Conjuntivo

Se trata de aplicar, de forma paralela, ambos modelos de selección directos, el guiado por dominancia y el guiado por no dominancia, como se muestra en la figura 4.11. De este modo, el conjunto de alternativas solución, notado X^{Conj}, se calcula como la intersección de los conjuntos solución obtenidos en ambos modelos, es decir,

$$X^{Conj} = X^{GDQ^S} \bigcap X^{GNDQ^S}.$$

Esta forma de combinar los modelos, conlleva el inconveniente, de que algunas veces

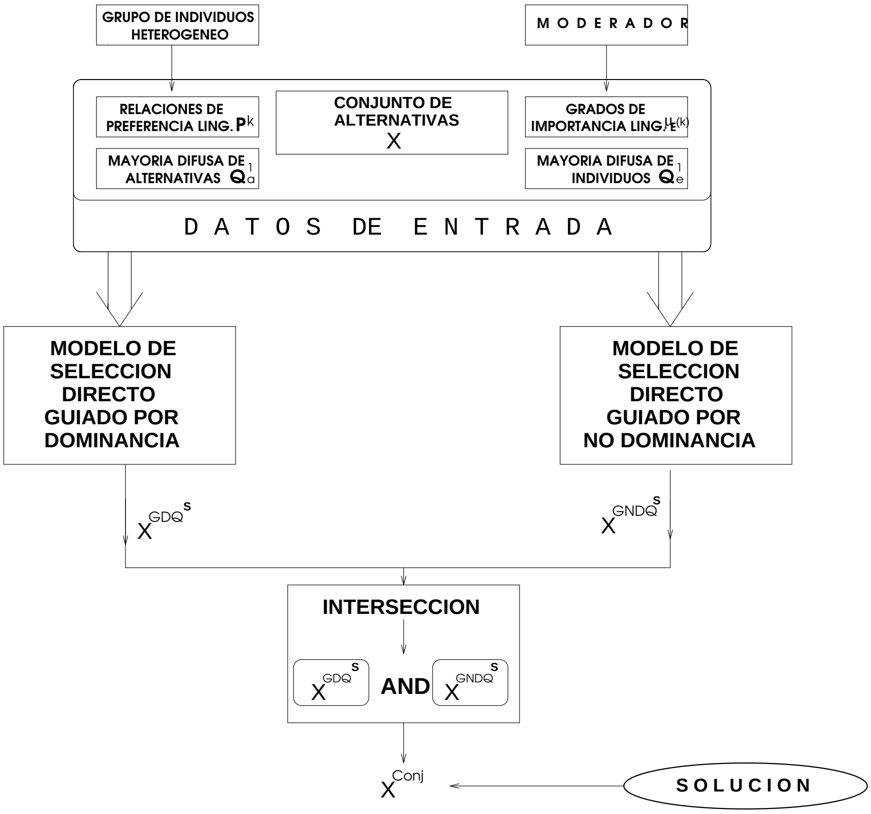

Figura 4.11. Modelo de Selección Conjuntivo con Esquemas Directos

el conjunto intersección puede ser vacío,

$$X^{GDQ^S} \bigcap X^{GNDQ^S} = \emptyset,$$

y entonces no obtenemos ninguna solución. Por ello, en estos casos, proponemos aplicar otro tipo de modelo de combinación, el modelo de selección secuencial, que presentamos en el siguiente apartado.

4.6.2 Modelo de Selección Secuencial

Este modelo consiste en aplicar ambos modelos de selección directos en secuencia, de acuerdo a un orden previamente establecido, como se muestra en la figura 4.12. No existe ningún criterio para establecer el orden de aplicación. Entonces, primero se obtiene la solución de acuerdo a uno de ellos, y posteriormente sobre el conjunto solución encontrado, caso de estar formado por más de una alternativa, se aplica el modelo que queda, obteniéndose así el conjunto de alternativas solución, X^{Seq}.

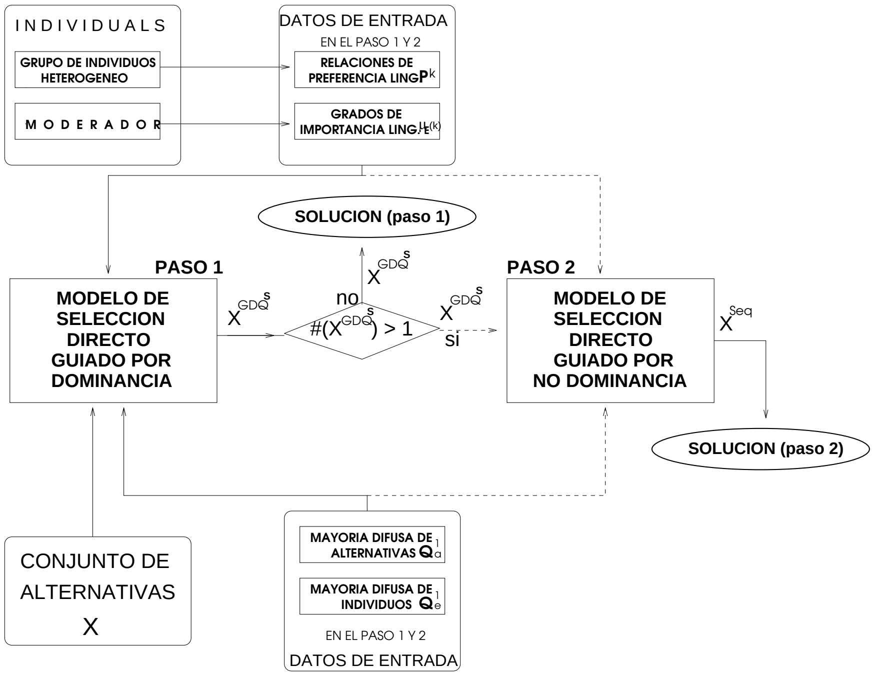

Figura 4.12. Modelo de Selección Secuencial con Esquemas Directos

Cuando aplicamos primero el modelo guiado por dominancia, entonces tenemos un modelo de selección secuencial basado en dominancia , y cuando es el modelo guiado por no dominancia, tenemos un modelo de selección secuencial basado en no dominancia. El de la figura 4.12 es un modelo de selección secuencial basado en dominancia, y conlleva los siguientes pasos:

1. Aplicar primero el modelo lingüístico de selección directo guiado por dominancia. Se obtiene el conjunto de alternativas solución, X^{GDQ^S}. Si se verifica que $\#(X^{GDQ^S}) = 1$, entonces $X^{Seq} = X^{GDQ^S}$ y FIN. En otro caso, se continua en el siguiente paso.

2. Aplicar el segundo modelo sobre el conjunto X^{GDQ^S}, obteniendo la solución final,
$$X^{Seq} \subseteq X^{GDQ^S}.$$

Nota. Hemos de considerar que cuando se verifica que

$$X^{GDQ^S} \bigcap X^{GNDQ^S} \neq \emptyset,$$

entonces el modelo conjuntivo y el secuencial son equivalentes, es decir,

$$X^{Conj} = X^{Seq}.$$

Por tanto, se pueden usar ambos modelos siguiendo este algoritmo:

1. Aplicar el modelo conjuntivo.
2. Si $X^{Conj} = \emptyset$, entonces aplicamos el modelo secuencial, en otro caso finalizar.

Ejemplo 4.6.1 Asumiendo los resultados de los ejemplos vistos sobre todos los modelos de selección directos e indirectos anteriores, tenemos:

1. Modelos Directos Homogéneo

   El conjunto de alternativas solución con el modelo de selección directo guiado por dominancia (apartado 4.4.1) es:

   $$X^{GDQ^S} = \{x_2, x_4\},$$

   y con el guiado por no dominancia (apartado 4.4.2) es:

   $$X^{GND^S} = \{x_2\},$$

   entonces, aplicando un modelo de selección conjuntivo, obtenemos una solución más específica:

   $$X^{Conj} = X^{GDQ^S} \bigcap X^{GND^S} = \{x_2\}.$$

2. Modelos Indirectos Homogéneos

   El conjunto de alternativas solución con el modelo de selección indirecto guiado por dominancia (apartado 4.5.1) es:

   $$X^{GDQ^C} = \{x_2, x_4\},$$

   y con el guiado por no dominancia (apartado 4.5.2) es:

   $$X^{GND\beta} = \{x_2\},$$

   por tanto, aplicando un modelo de selección conjuntivo, resulta esta solución más concreta:

   $$X^{Conj} = X^{GDQ^C} \bigcap X^{GND^C} = \{x_2\}.$$

3. Modelos Directos Heterogéneos

   Del mismo modo, el conjunto de alternativas solución con el modelo de selección directo guiado por dominancia (apartado 4.4.3) es:

$$X^{GDQ^S} = \{x_2, x_4\},$$

   y con el guiado por no dominancia (apartado 4.4.4) es:

$$X^{GNDQ^S} = \{x_4$$

   luego por tanto, la solución conjuntiva que obtenemos es más específica:

$$X^{Conj} = X^{GDQ^S} \bigcap X^{GNDQ^S} = \{x_4\}.$$

4. Modelos Indirectos Heterogéneos En el modelo de selección indirecto guiado por dominancia (apartado 4.5.3) se halla esta solución:

$$X^{GDQ^C} = \{x_4\},$$

   y en el guiado por no dominancia (apartado 4.5.4) esta otra:

$$X^{GNDQ^C} = \{x_4, x_2\},$$

   de nuevo, aplicando un modelo de selección conjuntivo una solución más específica es:

$$X^{Conj} = X^{GDQ^C} \bigcap X^{GNDQ^C} = \{x_4\}.$$

Nota. En ningún caso ha hecho falta aplicar el modelo de selección secuencial, porque en todos los casos basta con aplicar el modelo conjuntivo para obtener una solución. El secuencial se aplica caso de no existir solución.

□

Conclusiones

La resolución de un problema de TDG en contexto lingüístico conlleva fundamentalmente tres aspectos: (i) el manejo de información lingüística, (ii) el desarrollo de procesos de consenso adecuados, y (iii) el desarrollo de procesos de selección de alternativas. Atendiendo a estos aspectos, los resultados obtenidos en esta memoria pueden resumirse en los siguientes apartados:

A. Sobre Combinación y Manejo de Información Lingüística

1. Para manejar información lingüística no ponderada, el operador de agregación de información lingüística no ponderada LOWA, introducido en [32], ha sido analizado en profundidad y un estudio de su axiomática y propiedades se ha presentado [39, 44].

2. Tres nuevos operadores de agregación de información lingüística ponderada lingüísticamente se han presentado: (i) el operador disyuntivo DLP, (ii) el operador conjuntivo CLP, y (iii) el operador promedio PLP. Su definición se ha completado con un estudio de su axiomática y propiedades. Además algunas equivalencias entre ellos se han analizado.

B. Sobre Consenso entre Individuos

1. Se ha presentado la arquitectura de un modelo lingüístico de consenso en torno a dos tipos de medidas de consenso lingüísticas: (i) grados de consenso lingüísticos y (ii) proximidades lingüísticas. Estas medidas pueden aplicarse en tres niveles de opinión: (i) nivel de los pares de alternativas, (ii) nivel de las alternativas, y (iii) nivel de la relación. Por tanto la arquitectura contempla seis medidas de consenso lingüísticas [40, 41].

2. Se han propuesto dos modelos de consenso lingüístico guiado por medidas de consenso lingüísticas promedio y maximales, respectivamente. Ambos obtienen las medidas de consenso por un esquema basado en el concepto de coincidencia rígida y flexible y de acuerdo a una política de coincidencia promedio y maximal, respectivamente, [42, 45].

3. El concepto de coincidencia difusa se ha caracterizado y definido en los tres niveles de evaluación. En base a este concepto, se ha presentado un modelo de consenso lingüístico [46].

4. Se ha diseñado la arquitectura de un modelo de consenso lingüístico racional. Esta arquitectura contempla dos tipos de medidas lingüísticas, medidas de consenso y de consistencia. Se han definido dos tipos de medidas de consistencia lingüísticas: (i) medidas de consistencia lingüísticas individuales y (ii) medidas de consistencia lingüísticas colectivas. De ambas se han propuesto versiones cualitativas y cuantitativas [45].

C. Sobre Selección de Alternativas

1. Se han definido varios grados de selección de alternativas lingüísticos, en base a los que obtener el conjunto de alternativas solución: (i) el grado de dominancia lingüístico guiado por cuantificador, (ii) el grado de no dominancia lingüístico en el sentido de Orlovski, y (iii) el grado de no dominancia lingüístico guiado por cuantificador. Además, dependiendo de cómo se calculan se pueden caracterizar como: (i) individuales, (ii) colectivos, y (iii) sociales [34, 36, 37, 43, 44].

2. Se han definido y analizado modelos de selección de alternativas lingüísticos directos e indirectos basados en dominancia y en no dominancia tanto en problemas de TDG homogéneos [38, 44, 43, 37] como heterogéneos.

Desarrollos Futuros

En el mundo real hay multitud de situaciones que se pueden considerar como problemas de TDG, por ejemplo, en diagnóstico médico, en decisión financiera, en predicciones económicas, en política, etc. En la mayoría de los casos, sería muy beneficiosa la toma de decisiones asistida por ordenador. Por ello, nuestros esfuerzos futuros van encaminados en dos líneas de acción:

- Teórica: con objeto de incrementar el número de situaciones reales de TDG que podamos modelar, nos centraremos en el estudio de problemas de TDG en contextos lingüísticos con conjuntos de etiquetas de diferente granularidad.
- Práctica: diseño y desarrollo de Sistemas de Ayuda a la Toma de Decisiones en Grupo (SATDG), que implementen todos los modelos teóricos que se han presentado en esta memoria.

En esta segunda línea de acción, pensamos hacer un estudio de los distintos SATDG y de las distintas metodologías de construcción de SATDG que hay.

Básicamente, queremos desarrollar SATDG formados por tres componentes esenciales:

1. Un gestor de los diferentes modelos de consenso y selección que se han presentado en la memoria.
2. Un gestor de base de datos, que mantenga y actualice los distintos conjuntos de etiquetas y cuantificadores que se puedan usar, así como aquella información que por tener gran transcendencia tenga que almacenarse.
3. Un sistema interactivo de diálogo fácil de comprender y usar.

Creemos que las especiales peculiaridades de los problemas de TDG, como son la de involucrar a varios individuos que participan de un mismo problema, pueden ser modelizables más potentemente por SATDG en red, aprovechando las ventajas de las redes de ordenadores. Muchas de las ventajas de las redes de ordenadores podrían incorporarse a nuestro SATDG aumentando considerablemente su rendimiento. Para ello, pensamos que nuestro SATDG puede diseñarse haciendo uso de la estructura Cliente/Servidor, muy extendida en las aplicaciones en red, y más concretamente en INTERNET. De este modo, pensamos que podemos diseñar SATDG en red muy prácticos, que realmente ayuden a la toma de decisiones.

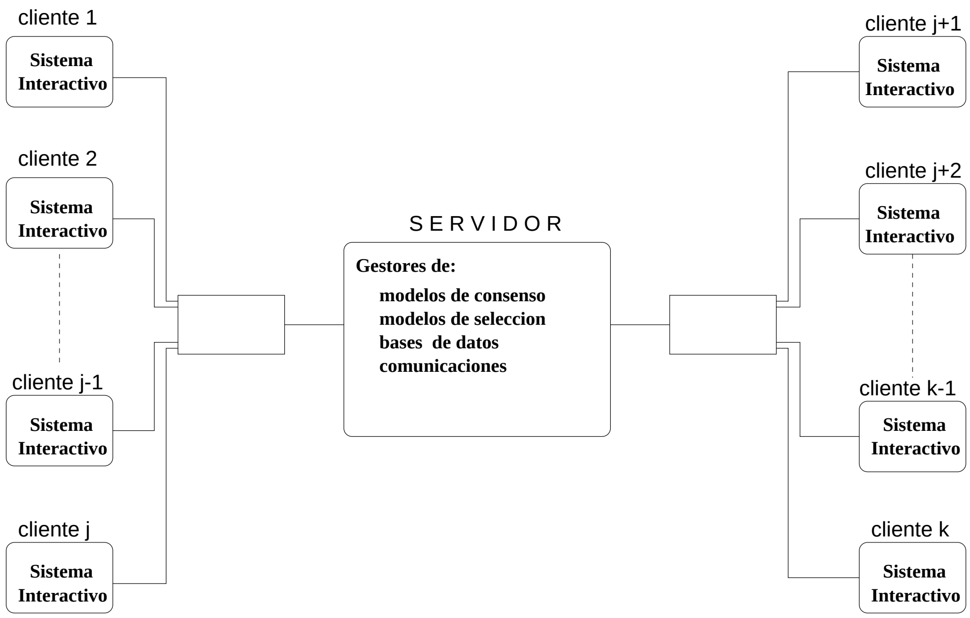

Figura 4.13. Estructura del SATDG

Desde un punto de vista software nuestro SATDG en red debe de estar formado por los siguiente módulos como se muestra en la figura 4.13:

1. Un módulo central, que haga de servidor e implemente: (i) el gestor de modelos de consenso y selección, (ii) el gestor de bases de datos, (iii) un gestor que controle la comunicación con los módulos periféricos o clientes, en cuanto a informarles de los valores de consenso, de las soluciones, etc..

2. k módulos periféricos o clientes, tantos como individuos participen en el problema de TDG, cada uno de ellos con un sistema interactivo de diálogo amigable, fácil de

usar, y

3. un módulo de comunicación entre el módulo central y los periféricos.

Haciendo uso de la filosofía de trabajo de los servidores WEB, podríamos crear los módulos cliente como páginas HTML, hacer uso del correo electrónico como módulo de comunicaciones, e implementar el módulo central con algún lenguaje de programación avanzado.

Bibliografía

[1] C. Alsina, E. Trillas and L. Valverde, On Some Logical Connectives for Fuzzy Sets Theory, *J. Math. Anal. Appl.* **93** (1983) 15-26.

[2] K.J. Arrow, *Social Choice and Individual Values* (Wiley, 1963).

[3] R.E. Bellman and L.A. Zadeh, Decision-Making in a Fuzzy Environment, *Management Science* **17** (1970) 53-79.

[4] R. Beyth-Marom, How Probable is Probable?. A Numerical Taxonomy Translation of Verbal Probability Expressions, *Journal of Forecasting* **1** (1982) 257-269.

[5] J.C. Bezdek, B. Spillman and R. Spillman, A Fuzzy Relation Space for Group Decision Theory, *Fuzzy Sets and Systems* **1** (1978) 255-268.

[6] J.C. Bezdek, B. Spillman and R. Spillman, Fuzzy Relation Spaces for Group Decision Theory, *Fuzzy Sets and Systems* **2** (1978) 5-14.

[7] P.P. Bonissone and K.S. Decker. Selecting Uncertainty Calculi and Granularity: An Experiment in Trading-off Precision and Complexity, in: L.H. Kanal and J.F. Lemmer, Eds., *Uncertainty in Artificial Intelligence* (North-Holland, 1986) 217-247.

[8] G. Bordogna, M Fedrizzi and G. Pasi, A Linguistic Approach to the Evaluation of Consensus in Group Decision Making, *Proc. of 5th Int. Workshop on Current Issues on Fuzzy Technologies: Decision Models and Systems*, Trento, (1995) 7-13.

[9] T.X. Bui, *Co-op, A Group Decision Support System for Cooperative Multiple Criteria Group Decision Making* (Springer-Verlag, 1987).

[10] C. Carlsson, D. Ehrenberg, P. Eklund, M. Fedrizzi, P. Gustafsson, P. Lindholm, G. Merkuryeva, T. Riissanen and A.G.S. Ventre, Consensus in Distributed Soft Environments, *European Journal of Operational Research* **61** (1992) 165-185.

[11] C. Carlsson and R. Fullér, On Fuzzy Screening Systems *Proc. of 3th European Congress on Intelligent Technologies and Soft Computing*, Aachen, (1995) 1261-1264.

[12] V. Cutello and J. Montero, A Model for Amalgamation in Group Decision Making, *Proc. of the North American Fuzzy Information Processing Society International Conference on Fuzzy Set Theory and Applications*, Puerto Vallarta, NASA Conference Publications 10112, Vol. **1** (1992) 215-223.

[13] V. Cutello and J. Montero, Hierarchies of Intensity Preference Aggregations, *Int. Journal of Approximate Reasoning* **10** (1994) 123-133.

[14] V. Cutello and J. Montero, Fuzzy Rationality Measures, *Fuzzy Sets and Systems* **62** (1994) 39-54.

[15] V. Cutello and J. Montero, Hierarchies of Aggregation Operators, *Int. Journal of Intelligent Systems* **9** (1994) 1025-1045.

[16] V. Cutello and J. Montero, Computational Problems of the Hierarchical Aggregation of OWA Operators, *Proc. of 5th Int. Conf. on Information Processing and Management of Uncertainly in Knowledge-Based Systems*, Paris, (1994) 407-411.

[17] V. Cutello and J. Montero, Recursive Families of OWA Operators, *Int. Journal of Intelligent Systems* **9** (1994) 1025-1045.

[18] P-T Chang and E. Stanley Lee, Fuzzy Decision Making: A Survey, in: P-Z Wang and K-F Loe, Eds., *Between Mind and Computer, Fuzzy Science and Engineering*, (World Scientific Publishing, 1993) 139-182.

[19] W. Cholewa, Aggregation of Fuzzy Opinions: an Axiomatic Approach, *Fuzzy Sets and Systems* **17** (1985) 249-259.

[20] M. Delgado, J.L. Verdegay and M.A. Vila, Linguistic Decision Making Models, *Int. Journal of Intelligent Systems* **7** (1993) 479-492.

[21] M. Delgado, J.L. Verdegay and M.A. Vila, On Aggregation Operations of Linguistic Labels, *Int. Journal of Intelligent Systems* **8** (1993) 351-370.

[22] M. Delgado, J.L. Verdegay and M.A. Vila, A Model for Incomplete and Vague Information in Decision Making Problems, *Int. Journal of Intelligent Systems* **9** (1994) 365-378.

[23] D. Dubois and H. Prade, A Review of Fuzzy Set Aggregation Connectives, *Information Science* **36** (1985) 85-121.

[24] D. Dubois and H. Prade, Weighted Minimum and Maximum Operations in Fuzzy Set Theory, *Information Science* **39** (1986) 205-210.

[25] D. Dubois, H. Prade and C. Testemale, Weighted Fuzzy Pattern Matching, *Fuzzy Sets and Systems* **28** (1988) 313-331.

[26] D. Dubois and J.L. Koning, Social Choice Axioms for Fuzzy Set Aggregation, *Fuzzy Sets and Systems* **43** (1991) 257-274.

[27] M. Fedrizzi and L. Mich, Rule Based Model for Consensus Reaching Group Decisions Support, *Proc. of 4th Int. Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems*, Palma de Mallorca, (1992) 301-304.

[28] M. Fedrizzi, J. Kacprzyk and H. Nurmi, Consensus Degrees under Fuzzy Majorities and Fuzzy Preferences Using OWA (Ordered Weighted Averaging) Operators, *Control and Cybernetics* **22** (1993) 71-80.

[29] J. Fodor and M. Roubens, *Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support* (Kluwer Academic Publishers, 1994).

[30] L.W. Fung and K.S. Fu, An Axiomatic Approach to Rational Decision Making in a Fuzzy Environment, in: L.A. Zadeh, et al., Eds., *Fuzzy Sets an Their*

Applications to Cognitive and Decision Processes (Academic Press, 1975) 227-256.

[31] L. Godo and C. Sierra, A New Approach to Connective Generation in the Framework of Expert Systems using Fuzzy Logic, *Proc. IEEE Conference*, (1988) 157-162.

[32] F. Herrera and J.L. Verdegay, Linguistic Assessments in Group Decision, *Proc. of 1th European Congress on Fuzzy and Intelligent Technologies*, Aachen, (1993) 941-948.

[33] F. Herrera and J.L. Verdegay, On Group Decision Making under Linguistic Preferences and Fuzzy Linguistic Quantifiers, *Proc. of 5th Int. Conf. on Information Processing and Management of Uncertainly in Knowledge-Based Systems*, Paris, (1994) 418-422.

[34] F. Herrera, E. Herrera-Viedma and J.L. Verdegay, On Dominance Degrees in Group Decision Making with Linguistic Preferences, *Proc. of 4th Int. Workshop, Current Issues on Fuzzy Technologies: Decision Models and Systems*, Trento, (1994) 113-117.

[35] F. Herrera, E. Herrera-Viedma and J.L. Verdegay, Un Proceso de Decision en Grupo con Preferencias Lingüísticas y Selección Secuencial, *Proc. del IV Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy*, Blanes, (1994) 215-220.

[36] F. Herrera, E. Herrera-Viedma and J.L. Verdegay, Preference Degrees over Linguistic Preference Relations in Decision Making, *Operational Research and Decisions* **3** (1995) 37-48.

[37] F. Herrera, E. Herrera-Viedma and J.L. Verdegay, A Sequential Selection Process in Group Decision Making with Linguistic Assessment, *Information Sciences* **85** (1995) 223-239.

[38] F. Herrera, E. Herrera-Viedma and J.L. Verdegay, Approaching Group Decision Making under Linguistic Assessments, *Proc. of 5th Int. Workshop on Current*

Issues on Fuzzy Technologies: Decision Models and Systems, Trento, (1995) 205-208.

[39] F. Herrera, E. Herrera-Viedma and J.L. Verdegay, Aggregating Linguistic Preferences: Properties of the LOWA Operator, *Proc. of 6th Int. Fuzzy Systems Association World Congress*, Sao Paulo, Vol. **I** (1995) 265-268.

[40] F. Herrera, E. Herrera-Viedma and J.L. Verdegay, Basis for a Consensus Model in Group Decision Making with Linguistic Preferences, *Proc. of 3th European Congress on Fuzzy and Intelligent Technologies*, Aachen, (1995) 1265-1269.

[41] F. Herrera, E. Herrera-Viedma and J.L. Verdegay, Medidas Lingüísticas para el Consenso en Grupo, *Proc. del V Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy*, Murcia, (1995) 309-314.

[42] F. Herrera, E. Herrera-Viedma and J.L. Verdegay, A Model of Consensus in Group Decision Making under Linguistic Assessments, *Fuzzy Sets and Systems* **78** (1996) 73-87.

[43] F. Herrera, E. Herrera-Viedma and J.L. Verdegay, A Linguistic Decision Process in Group Decision Making, *Group Decision and Negotiation* **5** (1996) 165-176.

[44] F. Herrera, E. Herrera-Viedma and J.L. Verdegay, Direct Approach Processes in Group Decision Making Using Linguistic OWA Operators. Por aparecer en *Fuzzy Sets and Systems* (1996).

[45] F. Herrera, E. Herrera-Viedma and J.L. Verdegay, A Rational Consensus Model in Group Decision Making under Linguistic Assessments. Por aparecer en *Fuzzy Sets and Systems* (1996).

[46] F. Herrera, E. Herrera-Viedma and J.L. Verdegay, Consensus Based on Fuzzy Coincidence for Group Decision Making in Linguistic Setting, in: J. Kacprzyk, H. Nurmi and M. Fedrizzi, Eds., *Consensus Under Fuzziness* (Kluwer Academic Publishers, 1996). Próxima aparición.

[47] J. Kacprzyk, Group Decision Making with a Fuzzy Linguistic Majority, *Fuzzy Sets and Systems* **18** (1986) 105-118.

[48] J. Kacprzyk, On Some Fuzzy Cores and 'Soft' Consensus Measures in Group Decision Making, in: J. Bezdek, Ed., *The Analysis of Fuzzy Information* (CRC Press, 1987) 119-130.

[49] J. Kacprzyk and M. Fedrizzi, 'Soft' Consensus Measure for Monitoring Real Consensus Reaching Processes under Fuzzy Preferences, *Control and Cybernetics* **15** (1986) 309-323.

[50] J. Kacprzyk and M. Fedrizzi, A 'Soft' Measure of Consensus in the Setting of Partial (Fuzzy) Preferences, *European Journal of Operational Research* **34** (1988) 316-323.

[51] J. Kacprzyk and M. Roubens, *Non-Conventional Preference Relations in Decision Making* (Springer-Verlag, 1988).

[52] J. Kacprzyk and M. Fedrizzi, *Multiperson Decision Making Models Using Fuzzy Sets and Possibility Theory* (Kluwer Academic Publishers, 1990).

[53] W.J.M. Kickert, *Fuzzy Theories on Decision Making* (Nijhoff, 1978).

[54] L. Kitainik, *Fuzzy Decision Procedures with Binary Relations* (Kluwer Academic Publishers, 1995).

[55] L. Mich, L. Gaio and M. Fedrizzi, On Fuzzy Logic-Based Consensus in Group Decision, *Proc. of 5th IFSA World Congress*, Seoul, (1993) 698-700.

[56] M. Mizumoto, Pictorial Representations of Fuzzy Connectives, Part I: Cases t-Norms, t-Conorms and Averaging Operators, *Fuzzy Sets and Systems* **31** (1989) 217-242.

[57] M. Mizumoto, Pictorial Representations of Fuzzy Connectives, Part II: Cases of Compensatory Operators and Self-Dual Operators, *Fuzzy Sets and Systems* **32** (1989) 45-79.

[58] J. Montero, A Note on Fung-Fu's Theorem, *Fuzzy Sets and Systems* **17** (1985) 259-269.

[59] J. Montero, Arrow's Theorem under Fuzzy Rationality, *Behavioural Science* **32** (1987) 267-273.

[60] J. Montero, Social Welfare Functions in a Fuzzy Environment, *Kybernetes* **16** (1987) 241-245.

[61] J. Montero, Aggregation of Fuzzy Opinions in a Non-Homogeneous Group, *Fuzzy Sets and Systems* **25** (1988) 15-20.

[62] H. Nurmi and J. Kacprzyk, On Fuzzy Tournaments and Their Solution Concepts in Group Decision Making, *European Journal of Operational Research* **51** (1991) 223-232.

[63] S.A. Orlovsky, Decision Making with a Fuzzy Preference Relation, *Fuzzy Sets and Systems* **1** (1978) 155-167.

[64] S.A. Orlovsky, *Calculus of Descomposable Properties, Fuzzy Sets and Decisions* (Allerton Press, 1994).

[65] G. Paun, An Impossibility Theorem for Indicator Aggregation, *Fuzzy Sets and Systems* **9** (1983) 205-210.

[66] M. Roubens, Ed., *Special Issue Aggregation and Best Choices of Imprecise Opinions* (Fuzzy Sets and Systems, Vol **43** N. 3, 1991).

[67] E. Sanchez, Importance in Knowledge Systems, *Information Systems* **14** (1989) 455-464.

[68] A.K. Sen, Social Choice Theory: A Re-Examination, *Econometrica* **45** (1977) 53-89.

[69] B. Spillman, J. Bezdek and Spillman R., Coalition Analysis with Fuzzy Sets, *Kybernetes* **8** (1979) 203-211.

[70] B. Spillman, R. Spillman and Bezdek J., A Fuzzy Analysis of Consensus in Small Groups, in: P.P. Wang and S.K. Chang, Eds., *Fuzzy Automata and Decision Processes* (North-Holland, 1980) 331-356 .

[71] R. Spillman and B. Spillman, A Survey of Some Contributions of Fuzzy Sets to Decision Theory, in: J.C. Bezdek, Ed., *Analysis of Fuzzy Information* (CRC Press, 1987) 109-118.

[72] T. Tanino, Fuzzy Preference Relations in Group Decision Making, in: J. Kacprzyk and M. Roubens, Eds., *Non-Conventional Preference Relations in Decision Making* (Springer-Verlag, 1988) 54-71.

[73] T. Tanino, On Group Decision Making Under Fuzzy Preferences, in: J. Kacprzyk and M. Fedrizzi, Eds., *Multiperson Decision Making Using Fuzzy Sets and Possibility Theory*, (Kluwer Academic Publishers, 1990) 172-185.

[74] M. Tong and P. P. Bonissone, A Linguistic Approach to Decision Making with Fuzzy Sets, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics,* Vol. **10** N. **11** (1980) 716-723.

[75] M. Tong and P. P. Bonissone, Linguistic Solutions to Fuzzy Decision Problems, *Studies in the Management Sciences* **20** (1984) 323-334.

[76] V. Torra and U. Cortes, Towards an Automatic Consensus Generator Tool: EGAC, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics,* Vol. **25** N. **5** (1995) 888-894.

[77] E. Trillas and L. Valverde, On Implication and Indistinguishability in the Setting of Fuzzy Logic, in: J. Kacprzyk and R.R Yager, Eds., *Management Decision Support System using Fuzzy Sets and Possibility Theory*, (Verlag TÜV Rheinland, 1985) 198-212.

[78] R.R. Yager, Fuzzy Decision Making Using Unequal Objectives, *Fuzzy Sets and Systems* **1** (1978) 87-95.

[79] R.R. Yager, A New Methodology for Ordinal Multiple Aspect Decision Based on Fuzzy Sets, *Decision Sciences* **12** (1981) 589-600.

[80] R.R. Yager, A Note on Weighted Queries in Information Retrieval Systems, *Journal of the American Society of Information Sciences* **38** (1987) 23-24.

[81] R.R. Yager, On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multicriteria Decision Making, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* Vol. **18** N. **1** (1988) 183-190.

[82] R.R. Yager, Connectives and Quantifiers in Fuzzy Sets, *Fuzzy Sets and Systems* **40** (1991) 39-75.

[83] R.R. Yager, Fuzzy Screening Systems, in: R. Lowen, Ed., *Fuzzy Logic: State of the Art*, (Kluwer Academic Publishers, 1993) 251-261.

[84] R.R. Yager, Applications and Extension of OWA Aggregation, *Int. Journal of Man-Machine Studies* **37** (1992) 103-132.

[85] R.R. Yager, Families of OWA Opertors, *Fuzzy Sets and Systems* **59** (1993) 125-148.

[86] R.R. Yager, Aggregation Operators and Fuzzy System Modelling, *Fuzzy Sets and Systems* **67** (1993) 129-145.

[87] R.R. Yager, MAM and MOM Bag Operators for Aggregation, *Information Sciences* **69** (1993) 259-273.

[88] R.R. Yager, On Weighted Median Aggregation, *Int. Journal of Uncertainty, Fuzzines and Knowledge-Based Systems* Vol. **2**, N. **1** (1994) 101-113.

[89] R.R. Yager, An Approach to Ordinal Decision Making, *Int. Journal of Approximate Reasoning* **12** (1995) 237-261.

[90] R.R. Yager, An Unified Approach to Aggregation Based Upon MOM and MAM Operators, *Int. Journal of Intelligent Systems* **10** (1995) 809-855.

[91] R.R. Yager, Quantifier Guided Aggregation Using OWA Operators, TR#MII1504. Machine Int. Ins., Iona College, New Rochelle, NY, 1995.

[92] R.R. Yager and D.P. Filev, Parametrized 'Andlike' and 'Orlike' OWA Operators, *Int. Journal of General Systems* **22** (1994) 297-316.

[93] L. A. Zadeh, Fuzzy Sets, *Information and Control* **8** (1965) 338-353.

[94] L. A. Zadeh, The Concept of a Linguistic Variable and Its Applications to Approximate Reasoning. Part I, *Information Sciences* **8** 199-249, Part II, *Information Sciences* **8** 301-357, Part III, *Information Sciences* **9** (1975) 43-80.

[95] L. A. Zadeh, Fuzzy Sets and Information Granularity, in: M.M. Gupta et al., Eds., *Advances in Fuzzy Sets Theory and Applications* (North Holland, 1979) 3-18.

[96] L. A. Zadeh, A Computational Approach to Fuzzy Quantifiers in Natural Languages, *Computers and Mathematics with Applications* **9** (1983) 149-184.

[97] H. J. Zimmermann, *Fuzzy Sets Theory and Its Applications* (Kluwer-Nijhoff, 1985).